ELEMENTI

DI

ARITMETICA

DEL P. COSTANTINO PAOLI

DELLE SCUOLE PIE.

SESTA EDIZIONE

SISTEMA METRICO-DECIMALE

RIDOTTA AGLI USI MODERNI.

FIRENZE

TIPOGRAFIA CALASANZIANA

dir. da A. Ferroni

1870.

PREFAZIONE.

« Persuaso quanto sia utile ai Giovani l'aver sotto gli occhi una norma, che in qualche modo gli diriga nei loro studi, ho distesi e dati in luce i presenti Elementi di Aritmetica, che abbracciano quasi tutto ciò che nelle Scuole Elementari si è fin qui praticato d'insegnare ai numerosi alunni che le frequentano.

Ho diviso questi Elementi in tre parti. La prima contiene le operazioni fondamentali dei numeri interi, dei rotti comuni, delle frazioni decimali e dei rotti eterogenei. La seconda ha per oggetto la formazione delle Potenze, l'estrazione della Radice quadra, la teoria delle Proporzioni e le regole superiori aritmetiche, che derivano dalle Proporzioni. La terza parte finalmente comprende le teorie delle Progressioni e dei Logaritmi, di cui avrei per verità potuto parlare immediatamente dopo le Proporzioni, non tanto per la loro intima ed immediata dipendenza dalle medesime, quanto

ancora per l'immensa facilità che le teorie contenute in questi due trattati, ed in special modo l'uso dei Logaritmi, apportano nei calcoli e nelle soluzioni più ricercate dell'Aritmetica. Ma siccome non tutti i Giovani che frequentano le pubbliche scuole hanno per oggetto di arricchirsi di tanta scienza, e molta parte di essi solo dimanda le cognizioni delle pure pratiche più ordinarie e più in uso, ho dunque risoluto di rimettere al termine del corso questi due trattati, non affatto necessari alle vedute dei più, ma non indispensabili per un sufficiente Aritmetico. Aggiungasi che quanto le sopraccennate teorie sono in sè stesse pregevoli e di grande aiuto nel computo, altrettanto esigono per esser bene apprese una più matura intelligenza ed uno spirito più esercitato. Male adunque avrei provveduto al buon metodo d'istruire, proponendole ai principianti in mezzo al loro corso, coll'evidente rischio che i più tardi d'ingegno, di troppo arrestandosi in queste più difficoltose dottrine, si trovassero poi mancanti del tempo necessario per l'acquisto delle altre cognizioni di lor maggiore utilità.

Riflessioni analoghe alle precedenti mi hanno mosso altresì a disporre in tutta l'opera le materie in modo tale, che nel testo si trovassero esposte ed insegnate le sole pure pratiche della scienza, mentre le dimostrazioni e ragioni delle medesime son tutte rimandate alle note. Poichè come è vero che meglio si apprendono, e più francamente si maneggiano e si applicano i pre-

cetti, allorchè si ha chiara e piena cognizione dei fondamenti che servon loro di appoggio, e delle sorgenti da cui derivano; egualmente è vero per altro, che non tutti i principianti, e in special modo quelli di troppo tenera età, hanno mente abbastanza acuta e robusta da risalire fino a queste sorgenti, e tener dietro a quel forte ed elevato ragionare che diresse i primi maestri e i successivi promotori dell'arte in ciascuno dei loro passi e delle loro invenzioni. E nel modo stesso che dannoso riuscirebbe al profitto dei più penetranti e dei più sagaci il guidarli affatto cecamente senza alcuna direzione di raziocinio per le nude vie delle pratiche usuali, così ridonderebbe in aggravio e pregiudizio notabile dei meno capaci il trattenerli intorno a spiegazioni e ragioni, che non fossero atti a comprendere, e impedire loro intanto di avanzarsi almeno nella meccanica cognizione dei precetti, per il solo motivo che non ne intendessero i fondamenti. Ora a me sembra, che l'uno e l'altro scoglio possa venire evitato nel mio piano. Il testo, non interrotto da veruna dimostrazione ragionata, forma come un corpo di regole pratiche adattate, siccome mi lusingo, alla capacità di tutti i giovani, comunque ordinaria e limitata suppor se ne voglia l'intelligenza. Le note, che contengono le spiegazioni delle regole esposte nel testo, potranno essere oggetto di studio ai più destri ed istruiti, che sapranno occuparsene o contemporaneamente alla lettura del testo, o dopo averlo interamente percorso, e quando l'età

loro fatta più matura e l' abitudine acquistata al calcolo gli avranno resi più idonei a seguir l' andamento dei raziocinj che vi si espongono.

Per render ancor più completi questi elementi ho in fine della terza parte riunite alcune notizie più essenziali della Geometria pratica numerica, le quali possono servire a misurare i perimetri, le superficie e le solidità, che più comunemente vengono in uso; come anche ad esercitare i giovanetti nello studio del disegno lineare. »

Con queste parole il valente Aritmetico Padre Costantino Paoli preludeva all' edizione del suo pregiato lavoro. Ora noi dobbiamo aggiungere che a fine di farlo rispondere meglio agli usi del calcolo secondo il nuovo sistema metrico-decimale, credemmo opportuno nella presente edizione di maggiormente sviluppare la teoria dei decimali, di esporre il sistema metrico-decimale, il metodo per la riduzione dei vecchi pesi e misure ai pesi e alle misure nuove, e viceversa: lo che ci ha indotti a restringere entro più brevi limiti la teoria dei rotti eterogenei, ed a sostituire nei vari e molteplici esempi alla vecchia unità di misura e di moneta la nuova. Perchè poi la presente edizione fosse anche più completa delle altre, abbiamo stimato conveniente di aggiungere e dichiarare il sistema di numerazione, la regola per l' estrazione delle radici cubiche, come anche qualche nozione intorno alle principali operazioni sui fondi pubblici; nè è stato omesso di fare quelle ag-

giunte, che parevano necessarie, alle proporzioni, alla regola del tre, alla regola di sconto, ai reparti ec. Infine tutte le tavole sono state accresciute e corrette dietro la norma dei più sicuri dati.

Le quali aggiunte e correzioni fatte a questo trattato del P. Paoli, non gli tolgono per nulla (e così volevamo che fosse) quell' impronta e quel carattere tutto suo proprio, che gli seppe dare quel valente aritmetico e che tanto favore incontrò nelle pubbliche scuole; onde nutriamo viva fiducia che la presente edizione sarà anche oggi con egual favore universalmente accolta.

PARTE PRIMA.

Operazioni fondamentali dei numeri interi, dei rotti comuni, decimali ed eterogenei.

1. L'Aritmetica è la scienza dei numeri, ed insegna a conoscere ed eseguire le diverse operazioni che possono farsi con essi.

2. Il *Numero* è una riunione di più *unità:* l'Unità è il termine di confronto per misurare le quantità, cioè tutto ciò che può crescere o scemare: sono unità la Lira, l'Uomo, la Casa ec.

3. I numeri sono *astratti* o *indeterminati*, *concreti* o *determinati:* astratti quando non indicano l'unità che rappresentano; concreti, quando la indicano. Dicendo tre, sette, cento ec. si enunciano numeri astratti: dicendo tre lire, sette uomini, cento case ec. si enunciano numeri concreti.

4. Il numero può esser anche intero e frazionario: intero quando indica un tutto o riunione di più quantità di un genere stesso e complete; come una lira, cento case, tre uomini ec.; frazionario, quando indica una o più parti d'un tutto, come un quinto di lira, tre decimi di metro ec.

5. Le Operazioni principali dell'Aritmetica sono quattro: Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione.

Sistema di Numerazione.

6. Prima di assegnare le regole per eseguire le diverse operazioni aritmetiche è necessario stabilire il modo di

enunciare e di scrivere tutti i numeri possibili: questo è ciò che si chiama Sistema di Numerazione, che comprende la Numerazione parlata e la Numerazione scritta.

7. Cominciando dalla prima diremo che fu convenuto di chiamare *uno* l'unità di qualsiasi specie; *due* la riunione di una unità con un'altra; *tre* quella di due unità con un'altra, e così successivamente *quattro, cinque, sei, sette, otto* e *nove*. Questi primi numeri furono detti *unità semplici* o *di primo ordine*.

8. Ma poichè ad un numero qualunque può sempre aggiungersi un'altra unità, risulta che i numeri sono infiniti di numero; e che quindi si sarebbe invano cercato un numero infinito di vocaboli tutti diversi atti ad esprimerli.

Per riparare a tale inconveniente si ideò di raccogliere le unità per *diecine*, ossia fu convenuto che tutte le volte che si giungesse ad avere un numero rappresentato da tutte le unità semplici, più un'altra, si esprimesse col vocabolo *dieci* o *diecina*, e che di queste diecine od unità di secondo ordine se ne avessero nove: così coll'aggiungere una nuova unità alle prime unità semplici si ebbe *una diecina* o *dieci;* coll'aggiunta a questa diecina di nove unità semplici, più un'altra unità, ossia in tutto d'una diecina, si ebbero *due diecine* o *venti;* similmente aggiungendo a queste due diecine altre nove unità semplici, più un'altra unità, ossia in tutto una diecina, si ebbero *tre diecine* o *trenta*, e così via discorrendo *quattro diecine* o *quaranta.... nove diecine* o *novanta*.

Per i numeri poi rappresentati da una o più diecine e da unità semplici non bastanti a formare la successiva diecina, si ebbero i vocaboli *dieci e uno* o *undici, dieci e due* o *dodici, dieci e tre* o *tredici.... quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove,... ventuno,... trentaquattro,... ottantacinque,* ec. — Così coll'aggiunta del vocabolo dieci fu dato contare fino a nove diecine più nove unità, cioè fino a novantanove.

Procedendo col medesimo metodo, come nove unità

semplici, più un'altra unità, costituirono la collezione detta diecina, così fu convenuto che nove diecine più una diecina formassero un'altra collezione chiamata *centinaia* o *cento*, od *unità di terzo ordine;* e che di queste se n'avessero nove, cioè *un centinaio* o *cento*, *due centinaia* o *dugento*, *trecento*, *quattrocento*,... *novecento;* donde apparisce che un centinaio è formato da dieci diecine, ossia è dieci volte maggiore d'una diecina.

Per i numeri poi rappresentati da una o più centinaia e da unità del primo o del secondo ordine, o dell'uno e dell'altro insieme non bastanti a formare il successivo centinaio, si ebbero i vocaboli *cento e uno* o *centuno*, *cento e due* o *centodue*,... *centotrenta*,... *quattrocentosessanta*,... *seicentoquarantacinque*, ec.; e così coll'aggiunta del vocabolo *cento* si potè contare fino a nove centinaia, nove diecine e nove unità, cioè fino a novecentonovantanove.

Inoltre alla riunione delle nove centinaia più un altro centinaio si dette il nome di *migliaio* o *mille*, od *unità di quarto ordine;* e di queste se n'ebbero parimente nove, cioè, *un migliaio* o *mille*, *due migliaia* o *duemila*, *tremila*,... *novemila*. Dal che deriva che un migliaio è formato da dieci centinaia, ossia è dieci volte maggiore d'un centinaio.

Come negli altri ordini, qui pure per indicare i numeri intermedi si ebbero i vocaboli *mille uno*, *mille due*,... *mille trentacinque*,... *millecentocinquanta*,... *ottomilacinquecentosessantadue*, ec. e così coll'aggiunta del vocabolo mille si potè contare fino a nove migliaia, nove centinaia, nove diecine e nove unità, cioè fino a novemila novecentonovantanove.

E qui fu novamente stabilito che nove migliaia più un altro migliaio, ossia dieci migliaia formassero una *unità di quinto ordine* chiamata *diecina di migliaia* o *dieci mila*, e che dieci diecine di migliaia formassero una *unità di sesto ordine* detta *centinaia di migliaia* o *centomila;* e di ciascuno di questi ordini si ebbero nove unità, ciascuna dieci volte maggiore dell'antecedente. A tali numeri si po-

terono aggiungere tutte o in parte le unità degli ordini antecedenti; onde si giunse a contare fino a novecento novantanovemila novecento novantanove.

Finalmente fu convenuto che dieci centinaia di migliaia formassero una unità di primo ordine per una nuova classe detta dei *Milioni;* in cui si ebbero sei ordini di unità come nella precedente, cioè le *unità,* le *diecine,* le *centinaia,* le *migliaia di milione,* le *diecine,* le *centinaia di migliaia di milioni.* Quindi un milione è dieci volte maggiore di centomila, e contiene mille volte il mille.

Per la stessa legge che la riunione di dieci centinaia di migliaia formò un milione, così la riunione di dieci centinaia di migliaia di milioni costituì una unità di terza classe chiamata *Bilione;* in cui si ebbero parimente sei ordini di unità chiamati coi soliti nomi *di unità, diecine, centinaia di bilioni, unità, diecine, centinaia di migliaia di bilioni.* Un bilione è dieci volte maggiore di un centinaio di migliaia di milioni, e contiene perciò un milione di milioni.

Nel modo stesso si ebbero i *Trilioni,* i *Quadrilioni,* i *Quinquilioni* ec.

In tal guisa coi pochi vocaboli uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, cento, mille, milione, bilione, trilione, ec. si potè enunciare qualunque siasi numero.

9. Per passare dalla numerazione parlata a quella scritta, s'immaginò di rappresentare le nove unità colle seguenti cifre arabe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [1]

[1] Sette lettere ancora rappresentano i Numeri, che diconsi Numeri Romani:

I	V	X	L	C	D	M
uno	cinque	dieci	cinquanta	cento	cinquecento	mille

Se avanti ad una lettera di maggior valore trovasene una di minor va-

che respettivamente si leggono uno, due, tre,... nove. E perchè queste sole cifre valessero a indicare non soltanto le unità di primo ordine, ma anche quelle degli altri ordini successivi, fu convenuto che una cifra posta a sinistra di un'altra avesse un valore dieci volte maggiore di quello della cifra che le sta immediatamente a destra. Da questa legge discende che ciascuna cifra oltre al *valore assoluto* ha un *valore relativo* o *di posizione*: e che perciò se si trova nel primo posto a destra indica unità semplici, se collocata immediatamente a sinistra di questa, denota diecine, se a sinistra anche di questa, centinaia; e così di séguito unità, diecine, e centinaia di migliaia, milioni, diecine, centinaia di milioni, unità diecine e centinaia di migliaia di milioni, bilioni ec.: o in altri termini cominciando dalla nostra destra e andando verso la nostra sinistra, nel primo posto sta la cifra dell'unità, nel secondo delle diecine, nel terzo delle centinaia e così progressivamente delle migliaia, diecine, centinaia di migliaia, ec. Quindi il numero 91 sta ad indicare una unità e 9 diecine, ossia in tutto novantuno; 345 indica 5 unità, 4 diecine e 3 centinaia ossia trecento quarantacinque; parimente 7628, 8 unità, 2 diecine, 6 centinaia e 7 migliaia, ossia in tutto settemila seicentoventotto.

10. Ma poichè poteva avvenire che nello scrivere un numero mancasse un qualche ordine, fu immaginata una decima cifra, la quale non indicando alcuna unità, servisse a denotare nel numero scritto la mancanza di quel dato ordine, e nel tempo stesso a mantenere le altre cifre nel loro posto: questa nuova cifra fu chiamata *zero* e si rappresentò con (0). Per questo i numeri 500, 604, 3002 in-

lore, si defalca questa da quella; trovandosi dunque notato IV, si conterà per quattro; se IX, si dirà nove; se XL, si dirà quaranta; se XC, si dirà novanta. Se poi una lettera di minor valore sarà preceduta da una di maggior valore, sarà quella aumentata del valore di questa. Trovandosi dunque VI, si conterà per sei; se XI, si conterà per undici; se LV, si conterà per cinquantacinque; se CX, si conterà per centodieci.

dicano respettivamente cinquecento, seicentoquattro, tremiladue

11. Per togliere qualunque difficoltà nel leggere un numero vengono date le seguenti regole: andando da destra a sinistra si divide il numero in classi di tre cifre, non curandosi, se l'ultima rimane di una o di due cifre: poi su ciascuna classe di posto pari si mette un *m*, e sulle classi di posto dispari, cominciando dalla terza un 1, un 2, un 3, e così successivamente. Disposto in tal maniera il numero, si leggono le singole classi come se fossero sole, e in fondo s' aggiunge *mila*, se al di sopra di esse si trova un *m*, e milione, bilione, trilione, se 1, 2, 3. Si vede tal regola messa in pratica nel seguente esempio:

2 m 1 m
14,568,237,929,343;

che si leggerà 14 bilioni, 568 mila, 237 milioni, 929 mila, 343 unità: la parola *unità* può sottintendersi. — Parimente

m 4 m 3 m 2 m 1 m
9,000,823,023,005,248,000,360,400,205

che si legge 9mila quadrilioni (nove migliaia di quadrilioni) 823 mila, 23 trilioni, 5 mila, 248 bilioni, 360 milioni, 400 mila e 205.

12. Gli Inglesi, i Francesi e gli Spagnoli hanno un sistema di numerazione un poco diverso dall' esposto ammesso in Italia e in Germania. Essi dopo le centinaia di milioni pongono immediatamente la classe dei bilioni o miliardi, dopo le centinaia di questi i trilioni, e così di séguito. Onde leggendo col loro sistema, la regola sopra esposta si cambierà come appresso: l' esempio è il primo degli antecedenti:

3 2 1 m
14,568,237,929,343

che si legge 14 trilioni, 568 bilioni, 237 milioni, 929 mila e 343.

DELL' ADDIZIONE DEI NUMERI INTERI.

13. L'addizione è un'operazione con la quale si trova

un numero eguale a molti presi insieme. Il numero trovato si chiama *somma* de' numeri aggiunti.

14. Se i numeri son *semplici*, cioè se non oltrepassano il 9, la loro somma verrà data dalla Tavoletta seguente, che converrà bene apprendere a memoria, servendo anche di base fondamentale a tutte le regole che seguiranno.

Tavola dell' Addizione.

0	e	0	*fa*	0	1	e	4	*fa*	5	1	e	7	*fa*	8
1		1		2	2		4		6	2		7		9
2		1		3	3		4		7	3		7		10
3		1		4	4		4		8	4		7		11
4		1		5	5		4		9	5		7		12
5		1		6	6		4		10	6		7		13
6		1		7	7		4		11	7		7		14
7		1		8	8		4		12	8		7		15
8		1		9	9		4		13	9		7		16
9		1		10	10		4		14	10		7		17
1	e	2	*fa*	3	1	e	5	*fa*	6	1	e	8	*fa*	9
2		2		4	2		5		7	2		8		10
3		2		5	3		5		8	3		8		11
4		2		6	4		5		9	4		8		12
5		2		7	5		5		10	5		8		13
6		2		8	6		5		11	6		8		14
7		2		9	7		5		12	7		8		15
8		2		10	8		5		13	8		8		16
9		2		11	9		5		14	9		8		17
10		2		12	10		5		15	10		8		18
1	e	3	*fa*	4	1	e	6	*fa*	7	1	e	9	*fa*	10
2		3		5	2		6		8	2		9		11
3		3		6	3		6		9	3		9		12
4		3		7	4		6		10	4		9		13
5		3		8	5		6		11	5		9		14
6		3		9	6		6		12	6		9		15
7		3		10	7		6		13	7		9		16
8		3		11	8		6		14	8		9		17
9		3		12	9		6		15	9		9		18
10		3		13	10		6		16	10		9		19

15. Se i numeri da sommarsi sono composti ecco la regola: si scrivono questi numeri l'uno sotto l'altro in maniera, che le unità sieno sotto le unità, le diecine sotto le diecine, le centinaia sotto le centinaia ec. Sotto essi numeri si conduce una linea, e andando da destra a sinistra si prende la somma delle unità, e se questa non eccede il 9 si scrive qual'è; se lo supera, perchè contenga una o più diecine, si scrive soltanto ciò che avanza al di là delle diecine, e si aggiungono alla colonna seguente tante unità, quante furono le diecine ritenute. Si opera egualmente sulle diecine, sulle centinaia ec., e le somme trovate si scrivono sotto alle corrispondenti colonne. Ma queste avvertenze ed altre, che per non generar confusione si tralasciano, meglio si comprenderanno dal seguente esempio:

Ho fatto ad un mercante i pagamenti di contro in lire: voglio sapere quanto ho sborsato in tutto. Disposti i numeri come di fianco, incomincio a sommare a destra la prima colonna delle unità dicendo: 3 e 8 fa 11, e 4 fa 15; segno 5 sotto le unità, e porto 1 alla colonna delle diecine,[1] e dico: 1 e 8 fa 9, e 6 fa 15; e 9 fa 24; segno 4

46094
1468
87683
135245

[1] Infatti ciò che nel numero 15 precede il 5, è una diecina: dunque come tale deve esser serbata ed aggiunta alle altre diecine della colonna seguente. Può anche riflettersi che segnando il 5 in luogo del 15, si viene a diminuir la somma totale di una diecina; mentre si viene ad accrescerla parimente di una diecina, se sotto la seconda colonna si segna 24 in luogo di 23. Dunque in questa seconda operazione non altro si fa precisamente che restituire quanto si è tolto nella prima; onde il resultato finale deve mantenersi perfetto. Infine può osservarsi che la somma totale dei tre numeri proposti deve necessariamente equivalere a quella di tutte le somme parziali di ciascuna delle colonne.

Ora la somma della 1.a dà unità.	15
Quella della 2.a dà diecine 23, o unità.	230
Quella della 3.a dà centinaia 10, o unità.	1000
Quella della 4.a dà migliaia 14, o unità.	14000
Quella della 5.a dà centinaia di migliaia 12, o unità.	. 120000
Somma totale. . .	135245

Ove anche più manifestamente apparisce, come le diecine delle somme di ciascuna colonna sieno trasportate a far parte di quelle delle colonne che seguono.

sotto le diecine, e porto 2 alla colonna delle centinaia, e dico: 2 e 6 fa 8, e 4 fa 12 e 0 fa 12; segno 2 sotto la colonna delle centinaia, e porto 1 alla colonna delle migliaia, e dico: 1 e 7 fa 8, e 1 fa 9, e 6 fa 15; segno 5 sotto la colonna dell'unità di migliaia, e porto 1 alla colonna delle diecine di migliaia, e dico: 1 e 8 fa 9, e 4 fa 13, che segno interamente; il che si farà sempre rapporto alla somma della sola ultima colonna. Terminata così l'operazione si risponderà che il pagamento fatto è di lire 135245.

16. La riprova dell'addizione si fa col sommare di nuovo tutte le file meno una qualunque, tenendo il metodo prescritto. Se aggiunta alla fila trascurata questa seconda somma si abbia un resultamento eguale a quello della pri ma, questa sarà esatta; la ragione è manifesta.

Ad acquistare peraltro un'assoluta sicurezza, unita ad una certa franchezza nel sommare, conviene abituarsi a ben costituir le cifre in colonna, a ben formarle, e a *portare,* vale a dire aggiungere alla colonna seguente ciò che si ritiene nella precedente.

DELLA SOTTRAZIONE DEI NUMERI INTERI.

17. La sottrazione è un'operazione per mezzo della quale si trova la *differenza* tra due quantità date. A ben riuscire in quest'operazione è prima di tutto necessario imparare a memoria la seguente Tavoletta, dalla quale si ha la differenza nei casi, ne'quali non possa esser maggiore di 10, e che delle due quantità l'una non oltrepassi lo stesso 10, l'altra il 20.

Tavola della Sottrazione.

Da	1	*levare*	1	*resta*	0
	2		1		1
	3		1		2
	4		1		3
	5		1		4
	6		1		5
	7		1		6
	8		1		7
	9		1		8
	10		1		9
Da	2	*levare*	2	*resta*	0
	3		2		1
	4		2		2
	5		2		3
	6		2		4
	7		2		5
	8		2		6
	9		2		7
	10		2		8
	11		2		9
Da	3	*levare*	3	*resta*	0
	4		3		1
	5		3		2
	6		3		3
	7		3		4
	8		3		5
	9		3		6
	10		3		7
	11		3		8
	12		3		9
Da	4	*levare*	4	*resta*	0
	5		4		1
	6		4		2
	7		4		3
	8		4		4
	9		4		5
	10		4		6
Da	11	*levare*	4	*resta*	7
	12		4		8
	13		4		9
Da	5	*levare*	5	*resta*	0
	6		5		1
	7		5		2
	8		5		3
	9		5		4
	10		5		5
	11		5		6
	12		5		7
	13		5		8
	14		5		9
Da	6	*levare*	6	*resta*	0
	7		6		1
	8		6		2
	9		6		3
	10		6		4
	11		6		5
	12		6		6
	13		6		7
	14		6		8
	15		6		9
Da	7	*levare*	7	*resta*	0
	8		7		1
	9		7		2
	10		7		3
	11		7		4
	12		7		5
	13		7		6
	14		7		7
	15		7		8
	16		7		9
Da	8	*levare*	8	*resta*	0
	9		8		1
	10		8		2

Da	11	*levare*	8	*resta*	3
	12		8		4
	13		8		5
	14		8		6
	15		8		7
	16		8		8
	17		8		9

Da	9	*levare*	9	*resta*	0
	10		9		1
	11		9		2
	12		9		3
	13		9		4
	14		9		5
	15		9		6
Da	16	*levare*	9	*resta*	7
	17		9		8
	18		9		9

Da	10	*levare*	10	*resta*	0
	11		10		1
	12		10		2
	13		10		3
	14		10		4
	15		10		5
	16		10		6
	17		10		7
	18		10		8
	19		10		9

18. Dopo ciò se avute due quantità se ne voglia trovar la differenza, pongo primieramente la quantità minore sotto la maggiore in maniera, che le unità della prima corrispondano sotto le unità della seconda, le diecine sotto le diecine come nell'addizione, e cominciando dall'ultima colonna a destra nel modo, che si è prescritto nell'addizione, sottraggo le unità della fila inferiore da quelle della superiore, e segno sotto la linea il resto; e faccio in séguito altrettanto delle diecine, centinaia ec. conforme all'esempio che segue. Si abbia da sottrarre 2536 da 43787; qual sarà la differenza? Colloco i numeri uno sotto l'altro come di contro; incomincio l'operazione a destra delle unità, e dico: se da 7 levo 6 ho di resto 1, che scrivo sotto la colonna delle unità; quindi passo alla colonna delle diecine, e dico: se da 8 levo 3 resta 5, che scrivo sotto la colonna delle diecine, passo alla colonna delle centinaia, e dico: se da 7 levo 5 ho di resto 2, che scrivo sotto la colonna delle centinaia; passo alla colonna delle unità di migliaia, e dico: se da 3 levo 2 ho di resto 1, che scrivo sotto la colonna delle unità di migliaia: passo finalmente alla colonna delle diecine di migliaia, e dico: se da 4 levo 0, ho di resto 4, che scrivo sotto la colonna delle diecine di migliaia. Ter-

$$\begin{array}{r} 43787 \\ 2536 \\ \hline 41251 \end{array}$$

minata così l'operazione si risponderà dunque che l'avanzo richiesto è di 41251. Si verificherà la sottrazione con sommare il resto col minor numero, e se la somma eguaglierà il maggiore, l'operazione sarà ben fatta.[1]

19. Se poi accaderà di trovare qualche cifra nel numero inferiore maggiore della cifra corrispondente nel numero superiore, si aggiungerà una diecina al valor della cifra del numero superiore, e s'intenderà in séguito diminuita di un'unità la cifra seguente a sinistra.

Esempio. Se da 4853 si leva 2586, qual sarà la differenza?

Qui dunque non potendo sottrarre il 6 dal 3, in luogo di 3 leggerò secondo la data regola 13, e dirò: a chi da 13 leva 6 resta 7, che segnerò sotto la linea corrispondente in colonna.[2] La cifra seguente 5 dovrebbe, secondo ciò che si è detto, valutarsi per 4; ma come da 4 non può togliersi 8, così applicando di nuovo la data regola leggeremo 14, e diremo: a chi da 14 leva 8 resta 6, che segneremo. Valutando poi come 7 la seguente cifra, diremo: a chi da 7 leva 5 resta 2, che segneremo. In fine si dirà: a chi da 4 leva 2 resta 2, che parimente segneremo; e sarà terminata l'operazione. Dunque la differenza richiesta è 2267.

$$\begin{array}{r} 4853 \\ 2586 \\ \hline 2267 \end{array}$$

20. Se nel numero superiore v'è uno zero, dovrà considerarsi per 10 con diminuire al solito di un'unità la cifra seguente; e questo 10 si valuta come 9, quando sia occorso di aver dovuto aumentare di un'unità la cifra precedente.

Es. Si debba sottrarre 4692 da 8604; quanto si avrà di

[1] Si avverta che acquistata con l'uso sufficiente pratica e cognizione delle respettive classi, si può impunemente nel conteggio tralasciarsene i richiami, tanto nell'addizione, come nella sottrazione.

[2] Se in luogo di 3 leggo 13 vengo a crescer di una diecina di troppo il numero superiore: ma se poi in luogo delle 5 diecine che seguono, ne conto solamente 4, vengo a toglier così la diecina aggiunta, e il nnmero superiore ritorna ad esser lo stesso.

resto? Disposti i numeri al solito, si dirà: a chi da 4 leva 2 resta 2, che segno; a chi da 10 leva 9 resta 1, che segno; a chi da 15 leva 6 resta 9, che segno; e infine a chi da 7 leva 4 resta 3, che segno: e si avrà di resto 3912.

$$\begin{array}{r} 8604 \\ 4692 \\ \hline 3912 \end{array}$$

21. Se poi lo zero fosse preceduto da uno o più altri zeri, si toglierebbe l'unità dalla prima cifra significativa a sinistra; il primo zero a destra si valuterebbe per 10, e gli altri per 9. Con questa regola sottraendo 36964 da 350007, si troverà di resto 315043.

$$\begin{array}{r} 350007 \\ 36964 \\ \hline 313043 \end{array}$$

22. Che se poi la cifra precedente al primo zero fosse essa pure minore della corrispondente nel numero sottoposto, allora anche il primo zero dovrà valutarsi per 9. Così sottraendo 3596048 da 80900024, si avrà secondo queste e tutte le precedenti regole il resto 77303976.

$$\begin{array}{r} 80900024 \\ 3596048 \\ \hline 77303976 \end{array}$$

DELLA MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI.

23. La moltiplicazione serve a trovare prontamente la somma di un numero che si vuole prender più volte: così per trovare la somma di 15 preso 8 volte, invece di sommare 8 volte il 15, operazione che sarebbe assai lunga, si moltiplica, e si trova che la somma è 120.

24. In quest'esempio il 15 si chiama *moltiplicando,* l'8 *moltiplicatore,* e il 120 *prodotto:* il moltiplicando ed il moltiplicatore si chiamano in comune *fattori* del prodotto. Se sono eguali fra loro, si appellano ancora *radici*, e in questo caso il prodotto prende il nome di *potenza.*

25. Se in luogo di sommare 8 volte il 15, si somma 15 volte l'8, verrà la stessa somma 120: perciò *è indifferente il prendere l'uno o l'altro dei due fattori per moltiplicatore* o *per moltiplicando:* ordinariamente però il minore dei due numeri è quello che si presceglie per moltiplicatore.

26. I casi che possono presentarsi nella moltiplicazione si riducono a tre: o i due fattori della moltiplicazione sono *semplici*, vale a dire espressi da una sola cifra; o l'uno solo è semplice e l'altro composto di più cifre, o finalmente sono composti ambedue.

27. Si sa moltiplicare nel primo caso, allorchè si sono bene apprese le seguenti tavole della moltiplicazione.

Tavola della Moltiplicazione.

1 *via*	1 *fa*	1	4 *via*	1 *fa*	4	7 *via*	1 *fa*	7
1	2	2	4	2	8	7	2	14
1	3	3	4	3	12	7	3	21
1	4	4	4	4	16	7	4	28
1	5	5	4	5	20	7	5	35
1	6	6	4	6	24	7	6	42
1	7	7	4	7	28	7	7	49
1	8	8	4	8	32	7	8	56
1	9	9	4	9	36	7	9	63
1	10	10	4	10	40	7	10	70
2 *via*	1 *fa*	2	5 *via*	1 *fa*	5	8 *via*	1 *fa*	8
2	2	4	5	2	10	8	2	16
2	3	6	5	3	15	8	3	24
2	4	8	5	4	20	8	4	32
2	5	10	5	5	25	8	5	40
2	6	12	5	6	30	8	6	48
2	7	14	5	7	35	8	7	56
2	8	16	5	8	40	8	8	64
2	9	18	5	9	45	8	9	72
2	10	20	5	10	50	8	10	80
3 *via*	1 *fa*	3	6 *via*	1 *fa*	6	9 *via*	1	9
3	2	6	6	2	12	9	2	18
3	3	9	6	3	18	9	3	27
3	4	12	6	4	24	9	4	36
3	5	15	6	5	30	9	5	45
3	6	18	6	6	36	9	6	54
3	7	21	6	7	42	9	7	63
3	8	24	6	8	48	9	8	72
3	9	27	6	9	54	9	9	81
3	10	30	6	10	60	9	10	90

28. Nel secondo caso, si debba moltiplicare 436 per 7. Pongo il moltiplicatore 7 sotto il moltiplicando 436, come si vede qui di contro, oppure a destra del medesimo, separando allora l' uno dall' altro col segno ×, come potrà vedersi praticato in alcuni degli esempi seguenti. Conduco una linea al di sotto, e quindi incomincio l'operazione dal moltiplicare per 7 *moltiplicatore* le unità 6 del *moltiplicando;* e dico 7 via 6 fa 42, prodotto di cui segno le 2 unità, e mi riserbo, come abbiamo fatto nell' addizione le 4 diecine, per portarle o aggiungerle al prodotto seguente; poi passo a moltiplicare le diecine, e dico 3 via 7 fa 21 e 4 che porto, fa 25, di cui pongo il 5 presso al 2 già segnato, serbo o porto al solito 2; passo infine alla moltiplicazione delle centinaia, e dico: 4 via 7 fa 28 e 2 che porto fanno 30, che segno interamente a sinistra delle due cifre già poste: terminata così l'operazione, diremo essere il prodotto cercato 3052.

$$\begin{array}{r} 436 \\ 7 \\ \hline 3052 \end{array}$$

29. Nel terzo caso, quando cioè l'uno e l'altro fattore è un numero composto; si debba per esempio moltiplicare 642 per 365. Dispongo come nell'operazione seguente oppure nell'altra maniera indicata di sopra, il moltiplicando 642 e il moltiplicatore 365. Quindi condotta la linea di separazione, come si vede, di contro, con la regola data per il caso precedente, moltiplico a parte tutto il moltiplicando per le unità 5 del moltiplicatore, poi per le diecine 6, infine per le centinaia 3, ed ho i prodotti 3210, 3852, 1926, che a misura del loro sviluppo segno l'uno sotto dell'altro, in modo però che le unità del secondo corrispondano sotto le diecine del primo, le unità del terzo sotto le diecine del secondo; il che successivamente deve nella stessa guisa continuarsi, se il numero delle cifre del moltiplicatore e quindi quello dei prodotti parziali fosse maggiore. Disposti in tal guisa questi prodotti, se ne faccia la somma, colonna per colonna,

$$\begin{array}{r} 642\times365 \\ \hline 3210 \\ 3852 \\ 1926 \\ \hline 234330 \end{array}$$

rammentandoci di portare al solito da una colonna alla seguente, quando lo esige il caso, le diecine serbate. La somma 234330 così ottenuta, sarà il prodotto totale richiesto. [1]

[1] Per dar qualche ragione di questa regola premetterò che qualora il moltiplicatore composto sia 10, potrà aversene immediatamente il prodotto per qualsivoglia moltiplicando col solo aggiungere uno zero a destra dell'unità di quest'ultimo. È infatti manifesto, che l'aggiunta di questo zero facendo avanzare di una classe tutte le cifre, e riducendo così l'unità a diecine, le diecine a centinaia, le centinaia a migliaia ec., fa sì che tutto il moltiplicando acquista necessariamente un valore dieci volte più grande, e vien quindi ad equivalere esattamente al suo prodotto per 10. È poi chiaro che per somigliante ragione volendo moltiplicare o per 100, o per 1000, o per qualunque simil numero espresso dalla unità e da un dato numero di zeri, basterà aggiungere altrettanti zeri a destra del moltiplicando, e si sarà fatto il prodotto.

Se poi debbono moltiplicarsi per alcuna delle rimanenti diecine, come per 20, 30, o delle rimanenti centinaia, migliaia ec., come 200, 300, 2000, 3000, ec., in somma per qualunque delle cifre semplici seguite da due o più zeri, basterà procurarsi il prodotto per la cifra semplice del moltiplicatore e aggiungere a destra di esso tutti gli zeri da cui è seguita. Infatti, per dimostrarlo con un esempio, il moltiplicatore 20 essendo 10 volte più grande del 2, anche il prodotto per 20 dovrà esser 10 volte più grande del prodotto per 2: e in conseguenza avrò il prodotto per 20, se moltiplicherò prima per 2, poi per 10, ovvero se dopo aver moltiplicato per 2 aggiungerò un zero al prodotto finale; come per la ragione medesima avrò il prodotto per 200, 2000, ec., se allo stesso prodotto per il 2 aggiungerò due, tre zeri ec.

Dopo ciò, richiamando il propostoci esempio (paragrafo 29) osserveremo che 365 equivale alla somma di 5, di 60 e di 300, così il prodotto per 365 equivale alla somma dei prodotti parziali per 5, per 60 e per 300. Ora per ciò che abbiamo veduto, il prodotto per 5 equivale a 3210, il prodotto per 60 equivale a 38520, cioè al prodotto per 6 con l'aggiunta di un zero; il prodotto per 300 equivale a 192600, cioè al prodotto per 3 con l'aggiunta dei due zeri. Dunque il prodotto totale equivarrà alla somma dei tre prodotti parziali 3210, 38520, 192600. Questi, posti in colonna per esser sommati, prendono la disposizione che si vede qui contro. Ora è manifesto che lo zero che è in fondo al secondo prodotto, e i due che sono in fondo al terzo, non influiscono nulla nelle somme delle colonne a cui appartengono: possono dunque impunemente sopprimersi, nel qual caso il tipo dell'operazione torna a combinare esattamente con quello voluto appunto dalla regola data. Intanto se inutile si rende

```
  3210
 38520
192600
------
234330
```

30. *Osservazioni.* — I. Se il moltiplicatore, o il moltiplicando, o l'uno e l'altro insieme terminano con uno ovvero più zeri, non dovranno questi punto valutarsi nell'atto dell'operazione, la quale si eseguirà come se essi non vi fossero: ma si aggiungeranno poi tutti quanti alla destra del prodotto totale. Così se si deve moltiplicare 153200 per 4620, moltiplicherò 1532 per 462, ed aggiunti all'estremità del prodotto totale 707784 i due zeri soppressi nel moltiplicando e l'altro soppresso nel moltiplicatore, avrò 707784000, che sarà il vero prodotto richiesto.

```
153200×4620
  3064
 9192
6128
707784000
```

31. II. Se tra le cifre intermedie del moltiplicatore s'incontri uno zero non si valuterà; ma passando immediatamente a moltiplicare per la cifra significativa seguente, in luogo di segnare le unità del prodotto sotto le diecine del prodotto superiore, si avvertirà di segnarle sotto le centinaia, scalando una colonna di più. Così nell'esempio di fianco le unità del secondo prodotto parziale, che è quello per la cifra 3 susseguente allo zero, si troveranno collocate non sotto le diecine 4, ma sotto le centinaia 9 del primo.

```
1486×2304
    5944
  4458
 2972
3423744
```

32. III. Se lo zero nel moltiplicatore è seguito da uno

l'esprimere questi zeri, inutile altresì sarà il considerare nelle loro qualità respettive di diecine, centinaia ec. le cifre del moltiplicatore, le quali tutte potranno a norma della regola riguardarsi nelle moltiplicazioni parziali come semplici cifre di unità, purchè i prodotti si dispongano nell'indicato modo, e come naturalmente proverrebbero se gli zeri soppressi venissero al loro ordine e luogo ristabiliti.

Termineremo con avvertire che la moltiplicazione, la quale si è cominciata dall'ultima cifra a destra del moltiplicatore, avrebbe potuto ancora cominciarsi dalla prima a sinistra, purchè allora si fossero scalati i prodotti parziali in senso contrario, cioè facendo che le diecine degli inferiori cadessero respettivamente sotto le unità dei superiori. La ragione ne è per sè manifesta.

ovvero più zeri, si lasceranno tutti egualmente, e scendendo a moltiplicare per la cifra significativa, che sarà la prima ad incontrarsi, si trasporteranno le unità del suo prodotto tante cifre a sinistra delle diecine del prodotto superiore, quanti sono gli zeri, che successivamente si seguono nel moltiplicatore, conforme appunto è usato nell'esempio di contro.

```
   43264×32006
   -----------
    259584
  86528
129792
----------
1384707584
```

33. IV. Infine se si abbia un qualche zero anche nel moltiplicando, il suo prodotto per qualunque cifra del moltiplicatore sarà zero, e in sua vece dovranno segnarsi le diecine serbate o portate dal prodotto della classe precedente, qualora secondo le regole abbia luogo questo trasporto: altrimenti dovrà porsi nudamente lo zero. Eccone l'esempio:

```
  430602×634
  ----------
  1722408
 1291806
2583612
---------
273001668
```

34. Per far la moltiplicazione di un numero qualunque per il prodotto di più fattori, bisogna moltiplicarlo per il primo di essi; il prodotto che si ottiene per il 2° fattore, quindi questo nuovo prodotto per il 3°, e così di seguito. — Se abbiasi per es. da moltiplicare il 3 per $4\times5\times8$, dico prima di tutto 3 via 4 fa 12, poi 12 via 5 fa 60, 60 via 8 fa 480, che è il risultato finale. — Egualmente

$$\begin{array}{r} 35\times42\times4\times63 \\ \overline{70} \\ 140 \\ \hline 1470\times4 \\ \hline 5880\times63 \\ \hline 17640 \\ 35280 \\ \hline 370440 \end{array}$$

35. Alcune volte può tornar comodo eseguire la moltiplicazione supponendo il moltiplicatore prodotto di più fattori: questo è ciò che dicesi moltiplicazione *per ripiego.* — Così dovendosi moltiplicare il 65 per 42 si potrà moltiplicarlo per 6×7, il cui prodotto è 42.[1]

$$\begin{array}{r} 65\times42 \\ \overline{130} \\ 260 \\ \hline 2730 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65\times6 \\ \hline 390\times7 \\ \hline 2730 \end{array}$$

DELLA DIVISIONE DEI NUMERI INTERI.

36. La divisione serve a trovare quante volte un numero è contenuto in un altro.

Ora è manifesto, che un numero è contenuto tante volte in un altro, quante ne potrebbe esser sottratto: e perciò la via più naturale per giungere a queste ricerche sarebbe quella di sottrarre quante volte si può il minor dal maggiore. Così per sapere quante volte il 12 contiene il 4, dovrebbe dirsi: a chi di 12 leva 4 resta 8; di nuovo: a chi di 8 leva 4 resta 4; in fine: a chi di 4 leva 4 resta zero; dal che verrebbe a comprendersi, che il 4 entra 3

[1] Nell'Esempio antecedente abbiamo che 60×8 ovvero (paragrafo 25) 8×60 equivale a 480; ma il fattore 60 è il resultato di 3×4×5, quindi la moltiplicazione di 8 per 60 è la stessa che di 8 per 3×4×5.

volte nel 12. Questo metodo porterebbe per altro assai in lungo, atteso il gran numero di sottrazioni che nei più dei casi dovrebbero farsi; perciò è stata immaginata la *Divisione*, con la quale le sottrazioni sono risparmiate, e si giunge all'istesso intento, ma con calcolo sommamente minore.

37. In quest'operazione il maggiore dei due numeri, o quello che si tratta di dividere, si chiama *dividendo;* il minore per cui deve dividersi, si chiama *divisore;* il resultamento o il numero delle volte che il dividendo contiene il divisore, si chiama *quoto* o *quoziente.* Nel caso allegato di sopra, il 12 sarebbe dividendo, il 4 divisore e il 3 quoziente.

38. Talvolta, anzi il più delle volte, il dividendo non contiene esattamente il divisore, e la divisione dà allora un avanzo, che si troverebbe anche operando per via di sottrazioni. Così se il 12 contiene come abbiamo veduto il 4 tre volte, è chiaro che il 13 lo conterrà nel modo stesso 3 volte con l'avanzo d'1: il 14 tre volte con l'avanzo 2 ec. Quest'avanzo si chiama il *resto* della divisione, e quando ha luogo, il *dividendo* e il *divisore* si dicono *primi* tra di loro; mentre quando non vi è resto si chiamano *non primi*, e il dividendo si dice allora *multiplo* del divisore, e il divisore *summultiplo* del dividendo.

39. Anche nella divisione come nella moltiplicazione occorrono tre casi diversi:

I. Se il divisore sia semplice, e tale sia pure il dividendo, o essendo composto non giunga ad eguagliare il *decuplo* del divisore, cioè il prodotto di lui per 10.

II. Se con un divisore semplice si abbia un dividendo composto, più grande del decuplo del divisore.

III. Se tanto il divisore che il dividendo sieno numeri composti.

40. Nel primo caso basterà aver bene appresa la tavola della divisione, con l'aiuto della quale non solo avremo immediatamente il quoziente, ma ancora il resto quando vi sia.

Tavola per la Divisione.

1	*in*	0	*entra*	0	*avanza*	0
1		1		1		0
1		2		2		0
1		3		3		0
1		4		4		0
1		5		5		0
1		6		6		0
1		7		7		0
1		8		8		0
1		9		9		0
2	*in*	1	*entra*	0	*avanza*	1
2		2		1		0
2		5		2		1
2		6		3		0
2		9		4		1
2		10		5		0
2		13		6		1
2		14		7		0
2		17		8		1
2		18		9		0
3	*in*	2	*entra*	0	*avanza*	2
3		3		1		0
3		7		2		1
3		11		3		2
3		12		4		0
3		16		5		1
3		20		6		2
3		21		7		0
3		25		8		1
3		29		9		2
4	*in*	3	*entra*	0	*avanza*	3
4		4		1		0
4		9		2		1
4		14		3		2
4		19		4		3
4		20		5		0
4		25		6		1
4	*in*	30	*entra*	7	*avanza*	2
4		35		8		3
4		36		9		0
5	*in*	4	*entra*	0	*avanza*	4
5		5		1		0
5		11		2		1
5		17		3		2
5		23		4		3
5		29		5		4
5		30		6		0
5		36		7		1
5		42		8		2
5		48		9		3
6	*in*	5	*entra*	0	*avanza*	5
6		6		1		0
6		13		2		1
6		20		3		2
6		27		4		3
6		34		5		4
6		41		6		5
6		42		7		0
6		49		8		1
6		56		9		2
7	*in*	6	*entra*	0	*avanza*	6
7		7		1		0
7		15		2		1
7		23		3		2
7		31		4		3
7		39		5		4
7		47		6		5
7		55		7		6
7		56		8		0
7		64		9		1
8	*in*	7	*entra*	0	*avanza*	7
8		8		1		0
8		17		2		1
8		26		3		2

8 *in*	35 *entra*	4 *avanza*	3	9 *in*	19 *entra*	2 *avanza*	1
8	44	5	4	9	29	3	2
8	53	6	5	9	39	4	3
8	62	7	6	9	49	5	4
8	71	8	7	9	59	6	5
8	72	9	0	9	69	7	6
9 *in*	8 *entra*	0 *avanza*	8	9	79	8	7
9	9	1	0	9	89	9	8

11. Nel secondo caso, si debba dividere 7472 per 4. Porrò il dividendo 7472 a destra, e il divisore 4 alquanto lateralmente a sinistra, con la frapposizione di una linea come di contro, ed un'altra al di sopra del dividendo onde separarlo dal quoziente, che per lo più si usa segnare al di sopra di questa linea: quindi cominciando l'operazione dirò: il 4 (divisore) nel 7 (prima cifra del dividendo) entra 1 volta e avanza 3; segnerò il quoziente 1 nel luogo destinato sopra del dividendo; cangerò l'avanzo 3 in un 30, che unirò al 4 seconda cifra del dividendo formandone un 34, e proseguirò dicendo: il 4 (divisore) nel 34 entra 8 volte, e resta 2; porrò l'8 quoziente alla destra dell'1 già segnato, cangerò il 2 in 20, che unirò come sopra alla seguente cifra 7 componendone un 27, e continuando dirò: il 4 nel 27 entra 6 volte e avanza 3; porrò il 6 alla destra dell'8 in quoziente; cangerò l'avanzo 3 in 30, che unito alla cifra seguente 2 del dividendo darà un 32, e dirò: il 4 nel 32 entra 8 volte e niente avanza; segnerò l'8 in quoziente, e sarà così terminata l'operazione; dalla quale adunque risulterà che il 4 entra 1868 volte in punto nel 7472.[1]

```
   1868
  ------
4 / 7472
```

[1] Infatti il numero 7472 essendo composto di migliaia, centinaia, diecine e d'unità, è certo che avrò il quoziente per quattro ossia la quarta parte se prenderò e poi riunirò insieme il quarto delle migliaia, quello delle centinaia, quello delle diecine e in fine quello delle unità. Ora cominciando dal dividere per 4, o sia in quattro parti le 7 migliaia, è evidente che avrò tante migliaia per quoziente, o per valore di ciascuna parte e tante per resto, quante unità avrei dividendo per 4 semplicemente

42. Si avverta I. Che se il divisore sia maggiore della prima cifra del dividendo, come se dovesse dividersi 4832 per 5, dovranno immediatamente prendersi le prime due cifre, e dividere il numero che esse compongono, dicendo nel caso nostro: il 5 nel 48 entra 9 volte, e avanza 3 ec. II. Se proseguendo l'operazione s'incontri in qualche punto l'avanzo *zero*, si passerà a dividere la prima cifra che segue; e se questa sia più piccola del divisore si segnerà uno zero in quoziente, si unirà la cifra tutta intera in qualità di diecina con la seguente, e si continuerà secondo il solito l'operazione. Così se si abbia a dividere 59442 per 6 dirò: il 6 nel 59 entra 9 volte e avanza 5, nel 54 entra 9 volte, e avanza 0, nel 4 entra zero volte che segnerò in quoziente accanto al 9, e avanza 4, nel 42 entra 7 volte, e niente avanza; onde il quoziente ricercato sarà 9907. III. Se si abbia un resto anche dall'ultima divisione, si segnerà alla destra e alquanto più alto del quoziente, e sotto di esso con la frapposizione d'una linea, si segnerà il divisore.

```
     9907
    ------
 6 / 59442
```

43. Veniamo adesso al terzo caso, e debba dividersi un numero composto per un altro composto, come per esempio 148784 per 362. Incomincio dallo scrivere questi due numeri come sopra, e quindi separo con un punto nel dividendo tante cifre a sinistra quante ne occorrono per formare un numero che contenga il divisore. Poi per la stessa prima cifra del divisore divido la prima, ovvero le due prime del dividendo, dicendo: il 3 in 14 entra 4 volte e avanza 2; ma prima di segnare il 4 in

```
          411 2/362
       ----------
  362 / 1487.84
        1448
       ------
         398
         362
        -----
         364
         362
        -----
           2
```

il 7, cioè a dire una per quoziente e 3 per resto. Le 3 migliaia di resto equivalendo a 30 centinaia, e queste unite alle altre 4 del numero proposto formando centinaia 34, è altresì evidente che avrò dal dividere queste per 4 tante centinaia di quoziente e tante di resto, quante unità

quoziente mi assicurerò se anche il 6, seconda cifra del divisore, entra 4 volte nel 28, numero composto dell'avanzo 2 avuto dalla divisione precedente, e dall'8 cifra che nel dividendo segue a destra le due prime già poste a calcolo; e come il 6 non solo entra nel 28 quattro volte, ma avanza 4 che unito alla seguente cifra 7 del dividendo forma 47, osservo che anche il 2 è contenuto con notabile avanzo in esso 47. Conchiudo di qui che tutto il divisore, entra 4 volte nelle cifre superiori del dividendo; segno il 4 al luogo del quoziente, e per esso moltiplico con le note regole tutto il divisore ponendo il prodotto in modo, che le sue unità cadano in colonna sotto il 7, ultima delle cifre separate. Quindi sottraggo il prodotto così ottenuto dalle cifre superiori del dividendo; e sulla destra del resto 39 abbasso l'8, cioè la prima dopo le suddette quattro cifre separate in principio nel dividendo. Divido quindi col solito divisore 362 il 398 dicendo come sopra: il 3 nel 3 entra una volta e avanza zero, il 6 nel 9 entra pure una volta e avanza 3, il 2 nel 38 entra assai più che una volta; pongo dunque l'1 in quoziente alla destra del 4, e quindi per il medesimo moltiplico come sopra tutto il divisore, ponendo il prodotto sotto il 398; sottraggo al solito, ed ho di resto 36 alla cui destra pongo il 4, ultima cifra del dividendo, e col metodo stesso che sopra, passo a dividere 364 novamente, dicendo: il 3 nel 3 entra una volta senza avanzo, il 6 nel 6 entra pure una volta senza avanzo, ed il 2 nel 4 entra egualmente una volta con qualche avanzo:

avrei dal dividere semplicemente 34, cioè 8 di quoziente e 2 di resto. Le due centinaia di resto equivalendo a 20 diecine, e queste unite alle altre 7 del numero dato formando 27, avrò dividendole per 4, diecine 6 di quoziente e 3 diecine di resto. Le tre diecine di resto formando 30 unità, e queste congiunte alle 2 unità del numero dato, equivalendo a 32, divise che sieno per 4 daranno 8 unità per quoziente e nessun resto. Laonde riuniti, o sommati insieme il 1000 o quoziente delle migliaia, l'800 quoziente delle centinaia, il 60 quoziente delle diecine, l'8 quoziente delle unità avrò come sopra per somma o quoziente totale 1868.

segno adunque un altro 1 nel quoziente, per esso moltiplico come sopra il divisore, e ne sottraggo nel modo stesso il prodotto da 364: pongo il resto finale 2 un poco sopra della destra del quoziente, e sotto trascrivo il divisore con tramezzo una linea, e l' operazione è terminata.[1]

44. Altro *Esempio:* Debba dividersi 148641 per 428.

[1] Rinnovando qui pure il raziocinio fatto per il caso del divisore semplice, è certo che io avrei il quoziente cercato con dividere ad una ad una le classi del dividendo, che nell'esempio attuale giungono fino alle centinaia di migliaia. Se non che avendosi qui un divisore più grande e del numero delle centinaia di migliaia, che non sono più che 1, e delle diecine di migliaia, che non sono più che 14, e delle unità di migliaia, che non son più che 148, è evidente che dalla divisione di ciascuna di queste tre classi per il divisore 362, otterrò sempre il quoziente zero, e solo potrò cominciare ad averne uno effettivo dalla divisione delle centinaia che giungono a 1487. Dunque senza occuparmi delle tre classi anteriori io potrò subito cominciare la divisione dalle 1487 centinaia, valutando il dividendo come composto di queste, delle 8 diecine e delle 4 unità. In tal caso la prima cifra che risulterà in quoziente e che nascerà dal dividere per 362 le 1487 centinaia, sarà di centinaia; per averne il valore è manifesto che io potrò dire: se il 3 entra 4 volte con l'avanzo 2 nel 14, il 300 entrerà parimente nel 1400 quattro volte, ed avanzerà 200. Dunque nel 1487 entrerà 4 volte ed avanzerà 287; onde se il 62 entrerà parimente 4 volte in questo avanzo, è troppo chiaro che l'intero 362 entrerà 6 volte nel 1487; ora il 6 entra 4 volte nel 28 con l'avanzo 4, dunque il 60 entrerà 4 volte nel 280 e avanzerà 40, ed entrerà 4 volte nel 287, ed avanzerà 47; onde perchè il 62 entri 4 volte nel 287 non resta se non che altrettante volte il 2 entri nel 47, ma ciò succede con moltissimo avanzo: adunque si verifica che 62 entra 4 volte nel 287, e che in conseguenza lo stesso deve succedere del 362 rapporto al 1487. Frattanto moltiplicando per 4 quoziente il 362 divisore si ha di prodotto 1448, che differisce di 39 dal dividendo 1487: ciò vuol dire che la divisione del 1487 non può farsi esattamente, ma dà un resto di 39. E poichè il 1487 è numero di centinaia, sarà un numero di centinaia ancora il resto 39. Queste centinaia fanno 390 diecine che unite alle altre 8 che appartengono al dividendo dato producono il totale di 398 diecine; ed è manifesto che dal dividere queste per il solito 362 avremo le diecine del nostro quoziente. Ecco dunque perchè la regola insegna ad abbassare accanto al resto 39 la cifra 8, e proseguire sul numero nuovo la divisione.

Separate con un punto le 4 prime cifre, dirò: il 4 nel 14 entra 3 volte e avanza 2; il 2 nel 28 entra assai più che tre volte; e valutando che vi entrasse tre volte avanzerebbe 22, cioè più che 10, ed in tal caso (e serva questo di regola generale per tutti i casi simili) non proseguo i tentativi, e immediatamente segno il 3 nel quoziente. Quindi moltiplico per questo 3 il divisore, sottraggo il prodotto 1284 dalle quattro cifre già separate ed ottengo il resto 202, alla cui destra abbassato il 4 formo il numero 2024. Passando adesso a dividere questo per 428 dirò: il 4 nel 20 entra 5 volte senza resto, ma come il 2 nel 2 non entra egualmente 5 volte, dovrò dire il 4 nel 20 entra 4 volte con l'avanzo 4; il 2 nel 42 entra assai più che 4 volte: segnerò dunque 4 in quoziente, moltiplicherò, e sottrarrò come sopra: abbasserò accanto al resto 312 l'ultima cifra 1 del dividendo, e formerò così 3121; dirò novamente il 4 nel 31 entra 7 volte e avanza 3; il 2 nel 32 entra molto più che 7 volte, onde potrò scrivere in quoziente il 7, per cui moltiplicando, e quindi sottraendo al solito il prodotto avrò 125 ultimo resto della divisione, che porrò nella guisa già accennata di sopra presso il quoziente.

```
            347 125/428
428 / 1486.41
      1284
      ----
       2024
       1712
       ----
        3121
        2996
        ----
         125
```

45. *Osservazioni.* I. — I prodotti che risultano dalla moltiplicazione del divisore per ciascuna delle cifre che vanno successivamente segnandosi nel quoziente, dovranno essere sempre minori della quantità da cui si han da sottrarre. Se alcuno se ne trovi maggiore, ciò spiegherà che la cifra segnata per ultimo in quoziente è troppo grande: conviene dunque diminuirla almeno di un'unità e rinnovare il prodotto.

II. Egualmente i resti che si hanno dalle successive sottrazioni dovranno esser sempre minori del divisore. Succedendo l'opposto, ciò vorrà dire che la cifra segnata

per ultimo in quoziente è troppo piccola, e converrà aumentarla almeno di un' unità e rinnovare il prodotto.

III. Se il resto è così piccolo che anche coll' aggiunta della cifra abbassata dal dividendo rimanga sempre inferiore al divisore, converrà allora segnare zero in quoziente, e abbassata una nuova cifra continuare secondo il solito l' operazione. E se neppure la nuova cifra basti a formare un numero più grande del divisore, se ne abbasserà una terza, segnando prima un secondo zero in quoziente; e così si proseguirà a fare, finchè non si giunga a porre insieme un numero che superi il divisore. Eccone l' *Esempio*. Si domanda il quoziente di 790758 diviso per 394. Il 3 prima cifra del divisore entrando 2 volte, con un avanzo, nel 7, prima cifra del dividendo, separerò dunque tre sole cifre in quest' ultimo per dar principio all' operazione, e dirò: il 3 nel 7 entra 2 volte e avanza 1: il 9 nel 19 entra parimente due volte è avanza 1: il 4 nel 10 entra pure 2 volte. Segno il 2 in quoziente e

```
          2007
394 / 790.758
      788
      2758
      2758
      0000
```

fattone il prodotto per il divisore ed effettuata la sottrazione ho di resto 2, che col 7 abbassato di seguito forma 27, quantità minore del divisore. Segno dunque zero in quoziente, e abbasso accanto al 7 il 5, formando così il numero 275, che restando ugualmente minore del divisore mi obbliga a segnare di nuovo uno zero in quoziente. Abbassata quindi anche l' ultima cifra 8 compongo la quantità 2758: dopo di che dirò: il 3 nel 27 entrerebbe 9 volte senza avanzo; ma come il 9 non entra tante volte nel 5 tornerò indietro e dirò: il 3 in 27 entra 8 volte e resta 3, che col seguente 5 dà 35; e come il 9 in 35 non entra 8 volte ritorno novamente indietro e dico: il 3 nel 27 entra 7 volte ed avanza 6, che unito al 5 dà 65; il 9 in 65 entra pure 7 volte e resta 2, che col seguente 8 dà 28, e il 4 nel 28 entra pure 7 volte. Scrivo dunque 7 in quoziente, ne faccio al solito il prodotto per il divisore, ed eseguita la sottrazione, ho di resto zero.

IV. Se il divisore e il dividendo terminano in zero, se ne toglierà dall'uno e dall'altro un numero eguale prima di cominciare l'operazione.

V. Se il solo divisore termina in uno o più zeri, si separeranno altrettante cifre nel dividendo, le quali si serberanno per aggiungerle all'ultimo resto, allorchè si pone nel modo indicato alla destra del quoziente. Poi si opera come se gli zeri nel divisore non vi fossero.

VI. Nel quoziente non si può mettere mai più di 9, massima di tutte le cifre della nostra aritmetica, che è decimale.

46. L'operazione può ancor compendiarsi, sottraendo a mente i prodotti a misura che si sviluppano. Questo metodo detto volgarmente *danda alla breve,* a distinzione del precedente chiamato *danda alla lunga,* esige molta franchezza, e gran predominio di calcolo per essere esattamente adoperato. Quando però si sappia farne uso riesce d'immenso vantaggio e comodo, attesa la brevità sommamente maggiore, che introduce in tutta l'operazione: ed è quindi necessario ogni sforzo per acquistarne la pratica. Diamone un saggio riprendendo l'esempio 2.° del metodo precedente, già dichiarato al paragrafo 44. Si tratti dunque di dividere 148641 per 428. Separate, come si è detto sopra, le quattro prime cifre del dividendo, e stabilita con la solita regola la prima cifra 3 del quoziente, passando alla moltiplicazione di questa per il divisore, diremo: 3 via 8 fa 24, per andare al 26 (primo tra i numeri che superiormente al 24 termini in 6) vi voglion 2: segno dunque il 2 sotto il 6, e proseguo la moltiplicazione dicendo: 3 via 2 fa 6 e 2 che porto dal prodotto 24 precedente, fanno 8; dall'8 per andare all'8 (cifra che nel dividendo precede a sinistra il 6) non vi vuol nulla: segno dunque zero sotto l'8, e proseguo dicendo: 3 via 4 fa 12, per andare al 14 (prime cifre del dividendo) ci voglion 2, che

```
          347
     ---------
428 / 1486.41
       2024
        3121
         125
```

segno accanto allo zero; ed ho così il medesimo resto 202, che si è trovato egualmente coll'operazione alla lunga. Abbasso quindi il 4, e stabilita la nuova cifra 4 in quoziente, dico: 4 via 8 fa 32, per andare a 34 vi voglion 2, che segnerò sotto il 4: continuo quindi dicendo: 2 via 4 fa 8 e 3 che si porta 11, per andare al 12 vi vuol 1, che segnerò sotto il 2; 4 via 4 fa 16, e uno che porto 17; per andare al 20 vi voglion 3, che segnerò, e così avrò ottenuto il secondo resto 312. Abbasso quindi l'1, e stabilita la nuova cifra 7 in quoziente dirò 7 via 8 fa 56; per andar al 61 vi voglion 5, che segnerò sotto l'1; 2 via 7 fa 14, e 6 che si portano 20; per andare al 22 vi voglion 2, che segno sotto il 2: 7 via 4 fa 28 e 2 che porto 30; per andare al 31 vi vuole 1, e così avrò ottenuto l'ultimo resto 125.

47. In qualche circostanza ha luogo nella divisione anche un altro facil compendio, qualora cioè il divisore possa decomporsi in fattori semplici: come per esempio se dovesse dividersi per 12, numero decomponibile nei fattori 3 e 4 o per 36 decomponibile in 4 e 9. In tal caso si dividerà per uno dei fattori il dividendo proposto, e poscia si dividerà per l'altro il quoziente ottenuto. Questa regola è conosciuta col nome di regola del partire *per ripiego*. *Esempio.* Si debba dividere 4968 per 36.

36 / 4968
4 / 1242
9 / 138

Riprove della Moltiplicazione
e della Divisione.

48. *Riprova del nove.* — Ecco come si eseguisce la riprova del nove nella moltiplicazione. Preparate due linee che si taglino in modo di croce, si sommino tra di loro prima le cifre del moltiplicatore, poi quelle del moltipli-

cando; dalle somme si tolga il 9 quante volte si può, i resti che si avranno, si segnino negli angoli superiori della croce. Quindi si moltiplichino e si tolga, come sopra, il 9 dal loro prodotto, segnando il resto in uno degli angoli inferiori. Si operi nel modo medesimo sul prodotto totale della moltiplicazione, e si segni il resto nell'angolo rimasto vuoto. Se i due resti inferiori si eguaglieranno, l'operazione sarà ben fatta.

Verifichiamo con questa regola l'esempio del paragrafo 33. La somma delle cifre del moltiplicando è 15: da questa tolto il 9 ho il resto 6 che segno nell'angolo superiore a sinistra. La somma delle cifre del moltiplicatore è 13, la quale tolto il 9 dà di resto 4, che segno nell'angolo superiore a destra. Il prodotto di questi due resti è 24, da cui tolto il 9 due volte si ha d'avanzo 6, che segno. In fine la somma delle cifre del prodotto totale è 33, da cui, tolto il 9 tre volte, si ha di resto 6, che essendo eguale all'altro resto inferiore, mostra che l'operazione è ben fatta.[1]

6	4
6	6

[1] Questa regola ammette in pratica una ben comoda facilitazione, e consiste nel rigettare il 9 non dalle somme finali, ma bensì tutte le volte che nell'atto di formarle si giunge ad un numero eguale o maggiore di 9, nel qual caso continuando la somma con ciò che si avrà d'eccesso sopra del 9, si giunge in ultimo ad avere il medesimo avanzo che si avrebbe avuto ritraendo il 9 dalla somma totale. Così, ripreso il moltiplicando dello stesso paragrafo 33, potrà dirsi: 4 e 3 fa 7, e 6 fa 13, meno 9 resta 4; 4 e 2 fa 6, resto cercato come sopra. Egualmente ripreso il moltiplicatore diremo: 6 e 3 fa 9, meno 9, nulla; onde non avendo più altro, che la cifra 4, si porrà 4 per resto. Ripreso nel modo stesso il prodotto diremo: 2 e 7 fa 9; meno 9 nulla: 3 e 1 fa 4, e 6 fa 10, meno 9 resta 1: 1 e 6 fa 7, e 8 fa 15, meno 9 avanza 6; e questo, come si è già veduto anche sopra, sarà il resto del prodotto.

Anzi può facilitarsi la pratica sempre più, osservando che ove un numero non passi il 20 come avviene sempre nell'uso del precedente compendio, l'eccesso di lui sopra del 9 sarà sempre eguale alla somma delle sue cifre. Così delle due cifre componenti il 13, la somma è manifestamente 4, ed è egualmente 4 il resto che si ottiene togliendo da 13 il 9.

Si può anche avvertire, che ove il numero sia maggiore di 20, se si

Nella divisione la riprova del nove si fa col togliere prima il 9 dal divisore e poi dal quoziente; e segnati i resti negli angoli superiori della croce, questi si moltiplicano, e dal prodotto si toglie il 9: ma in luogo di scrivere l'avanzo nel solito angolo inferiore si somma col resto finale dell'operazione, o ancor meglio, si aggiunge mentalmente come nuova cifra a destra del resto finale della divisione. Al nuovo numero che risulta si toglie il 9, l'avanzo, che se ne ha è quello, che deve segnarsi nell'angolo di cui si parla, e che, se l'operazione è ben fatta, deve trovarsi eguale al resto, che si ottiene togliendo il 9 dal dividendo. Così nell'esempio superiore, (paragrafo 46) i resti del divisore e del quoziente sono 5 e 5, il loro prodotto è 25, che ha di resto 7, con questo e con l'avanzo finale della divisione si forma mentalmente 7125, il cui resto è 6, come parimente è 6 il resto, che proviene dal dividendo.[1]

5	5
6	6

49. *Riprova per doppio e metà.* — La moltiplicazione si verifica ancora con prendere e moltiplicare insieme la metà del moltiplicatore ed il doppio del moltiplicando, o il doppio del moltiplicatore e la metà del moltiplicando; operando al solito si deve giungere allo stesso prodotto. *Esem-*

sommino le cifre, e quindi di nuovo si sommino quelle della somma ottenuta, e così continui a farsi finchè non si giunga ad un numero semplice, questo numero eguaglierà precisamente il resto che si avrebbe togliendo il 9; così le cifre del numero 825486 sommate insieme danno 33, e quelle del 33 danno 6. Dunque il resto di 825486 per 9 sarà 6. Tuttociò dipende dalla natura decimale della nostra Aritmetica, ed è poi chiaramente dimostrato nell'Algebra.

[1] La riprova del 9, o si usi nella moltiplicazione o nella divisione, non è sempre sicura, nè allorchè torna, garantisce la bontà dell'operazione. È infatti chiaro che se nel prodotto o nel quoziente si abbia qualche 9 invece di qualche zero, e viceversa, o una cifra stia in luogo di un'altra, o l'una essendo difettosa in più, l'altra sia d'altrettanto in meno, la riprova reggerà, e l'operazione non cesserà per questo d'essere viziosa. Deve dunque usarsi con qualche sobrietà, e solo allorchè il lungo esercizio o la continua abitudine di calcolo avrà allontanato il pericolo di cader nei precitati abbagli.

pio. Si domanda qual sarà il prodotto di 476 moltiplicato per 36?

```
               476×36
               2856
              1428
Prodotto . . 17136
```

Prima Riprova.	Seconda Riprova.
952×18	238×72
7616	476
952	1666
17136	17136
Prodotto eguale al 1.°	Prodotto eguale al 1.° e 2.°

Se i fattori della moltiplicazione siano numeri dispari, sicchè non se ne possa avere esattamente la metà, s' aggiunge mentalmente uno zero a quello tra essi che dividesi per 2, e si toglie dal prodotto la cifra dell' unità che sarà sempre uno zero. Esempio:

```
 35×27      175×54
245         700
70         875
945        945,0
```

La medesima riprova nella divisione si fa con dividere il doppio del dividendo per il doppio del divisore, o la metà del primo per la metà del secondo. Eccone gli esempi: si debba dividere 15368 per 452; fatta l'operazione si trova per quoziente 34.

	Riprova per doppio.	Riprova per metà.
34	34	34
452 / 15368	904 / 30736	226 / 7684
1808	3616	904
000	000	000

50. *Riprova della moltiplicazione per divisione e viceversa.* — La riprova più reale, diretta e sicura della moltiplicazione si ha dalla divisione, e consiste nel dividere il prodotto per uno dei fattori. Se l'operazione è ben fatta dovrà il quoziente esser eguale all'altro fattore. Verifichiamo questa regola nell'esempio del Paragrafo 49:

```
        476
       -----
       17136
  36 /  273
        216
         00
```

Similmente nella divisione può farsi la riprova per mezzo della moltiplicazione: tal riprova consiste nel moltiplicare il divisore per il quoziente, e aggiungere il resto, se vi è, al prodotto totale, o inchiuderlo, come meglio e più comunemente si usa, tra i prodotti parziali e sommarlo insieme con loro. Se l'operazione è ben fatta dovrà il resultato essere eguale al dividendo. Verifichiamo questa regola coll'esempio del paragrafo 46:

```
                                      347×428
                                     ---------
                                       2776
                                       694
                                      1388
                        Resto           125
                                     ---------
Resultato eguale al dividendo        148641
```

Avvertimento.

Prima di progredire nelle altre operazioni aritmetiche, daremo idea e spiegazione di alcuni segni assai noti nell'Algebra e nella Geometria, e dei quali saremo costretti a fare uso per compendiare il discorso.

Si avverta adunque che il segno $=$ significa egualità, ed è destinato all'eguaglianza, e si legge *eguale:* il segno $+$ è

destinato all'addizione, e si legge *più:* onde per esprimere che voglio sommare 4 con 3 e 2 scrivo $4+3+2$, e leggo 4 più 3 più 2: e per mostrare che una tal somma dà 9, scrivo $4+3+2=9$.

Il segno $-$ è destinato alla sottrazione, e si legge *meno;* onde per esprimere che voglio sottrarre il 2 dal 4, e che il resto di questa sottrazione è 2, scrivo $4-2=2$, e leggo 4 meno 2, eguale a 2.

Il segno $\times$, come pure il punto posto tra due numeri sono ambedue destinati alla moltiplicazione, e si leggono *moltiplicato per.* Volendo dunque esprimere che moltiplico il 7 per 3, scrivo 7×3, oppure 7.3; e per esprimere che il prodotto di questa moltiplicazione è 21, scrivo $7\times3=21$, e leggo 7 moltiplicato per 3 eguale a 21.

Due punti o una linea posta fra un numero e l'altro sono segni destinati alla divisione, e si leggono *diviso per:* così per esprimere che voglio dividere 8 per 4 scriverò $\frac{8}{4}$, oppure $8:4$, e per esprimere che il quoziente di questa divisione è 2 scrivo $8:4=2$, e leggo 8 diviso per 4 eguale a 2.

Il segno $>$ si legge *maggiore di,* e significa che la quantità precedente il segno è maggiore di quella che lo segue: onde per esprimere che 9 è maggiore di 5 scrivo $9>5$. Il segno $<$ si legge *minore di,* e significa che la quantità che precede il segno è minore di quella che lo segue: così per indicare che 4 è minore di 7 scrivo $4<7$.

DEI ROTTI.

Della natura dei Rotti in generale; del loro valore e del loro paragone.

51. Una quantità qualunque è divisibile in due metà, in quattro quarti, in cinque quinti ec., e la riunione di queste parti è quella sola, che riproduce tutta la quantità: quindi se non si riuniscon tutte, mancherà qualche cosa a questa quantità. Non se ne avrà dunque allora che una porzione

più o meno grande, e questa porzione in generale si chiama *Rotto* o *Frazione*.

L'idea di rotto o frazione comprende pertanto la *specie* e il *numero* delle parti, che vogliono prendersi per avere una porzione più o meno grande di una tale o tal altra quantità. Così $\frac{1}{3}$ significa, che divisa in 3 parti eguali l'unità, non se ne sono prese che una; la frazione $\frac{4}{5}$ esprime, che divisa l'unità in 5 parti eguali, se ne son prese 4 ec.

Il numero o termine superiore si chiama *numeratore* del rotto, e l'inferiore si chiama *denominatore*; così nel rotto $\frac{4}{5}$ il numeratore è 4, e il denominatore è 5.

52. Un rotto propriamente detto è dunque una quantità minore dell'unità, e tanto minore quanto il suo numeratore è più piccolo del denominatore. Frattanto si trovano molto spesso dell'espressioni in forma di rotti, il cui numeratore è eguale e talvolta ancora più grande del denominatore. Quando sono eguali ambedue, la frazione è eguale all'unità, per esempio, $\frac{4}{4}$ significa che di un'unità divisa in 4 parti eguali se ne son prese appunto 4, cioè, come è chiaro, si è presa l'intera unità, e perciò $\frac{4}{4}=1$. Nel modo stesso $\frac{12}{12}=1$, $\frac{44}{44}=1$. Quando poi il numeratore supera il denominatore, ciò denota che si son raccolte più parti di quante ne occorrono per formare l'intero, e allora il valor del rotto supera l'unità: così

$$^{12}/_{4}=3;\ ^{49}/_{7}=7;\ ^{103}/_{20}=5+{}^{3}/_{20} \text{ ec.}$$

53. Non è sempre facile il conoscere a colpo d'occhio quale di due frazioni sia la più grande, se esse non abbiano un numeratore medesimo, o uno stesso denominatore. Per esempio, non si vede subito qual sia il maggior di questi due rotti $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$. Ma 1.° *Se essi abbiano uno stesso numeratore, quello che avrà un più piccolo denominatore sarà il più grande*; così il rotto $\frac{1}{2}$ è maggiore del rotto $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$ è maggiore di $\frac{3}{7}$ ec.

2.° *Se poi hanno il medesimo denominatore, allora il più grande è quello che ha il più gran numeratore*. Infatti è evidente che $\frac{2}{3}$ sono più che $\frac{1}{3}$, e $\frac{3}{8}$ più che $\frac{1}{8}$.

54. Dunque il valor di un rotto crescerà o diminuirà, se crescerà o diminuirà il suo numeratore; all'opposto scemerà o crescerà, se crescerà o diminuirà il suo denominatore.

Rimarrà poi lo stesso se tanto il numeratore che il denominatore crescano o scemino nello stesso rapporto, o sia se si moltiplichino o si dividano per una stessa quantità.

Così se si abbia il rotto $\frac{3}{4}$, e moltiplicando sopra e sotto per 2 si formi $\frac{6}{8}$, sarà questo nuovo rotto eguale al rotto primitivo $\frac{3}{4}$. E per la stessa ragione saranno parimente eguali a $\frac{3}{4}$ i rotti $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{18}{24}$ ec.

Perciò il valore di un rotto può esprimersi in una infinità di maniere tutte differenti fra loro; principio fondamentale di tutta la teoria delle frazioni.[1]

OPERAZIONI PRELIMINARI SUI ROTTI.

Oltre le quattro regole ordinarie da noi spiegate nel calcolo dei numeri interi, ve ne sono alcune altre particolari per i rotti. Esse consistono 1.° nel trasformare in un rotto un qualunque numero intero; 2.° nell'unire un rotto con un intero; 3.° nel ridurre più rotti allo stesso denominatore, e questa è la più in uso; 4.° nel ridurre un rotto qualunque alla più semplice espressione. Si vedrà in breve l'utilità di queste regole.

[1] Allorchè si moltiplica per una stessa quantità il numeratore e il denominatore, è chiaro, per gli stabiliti principj, che il rotto cresce per un verso, di quanto scema per l' altro. Parimente allorchè il numeratore e il denominatore si dividono per una stessa quantità, il rotto scemerà per una parte di quanto crescerà per l'altra, che è quanto dire che nell'uno e nell'altro caso deve rimanere il medesimo. Ciò si rende ancor più manifesto coll'esempio del rotto $^3/_4$. È chiaro che se ne moltiplico per 2 il denominatore e lo riduco a $^3/_8$, io vengo a diminuirlo per metà, poichè come $^1/_8$ è la metà di un $^1/_4$, così $^3/_8$ son la metà di $^3/_4$. Dunque se questi $^3/_8$ io gli raddoppio, e gli riduco a $^6/_8$ moltiplicandone per 2 il numeratore, verrò ad avere di nuovo un valore eguale a quello che prima aveva, cioè a $^3/_4$.

55. *Trasformare un intero in un rotto del medesimo valore.* Ciò si otterrà 1.° con dare all' intero l' unità per denominatore, scrivendo per esempio $\frac{7}{1}$ in lungo di 7, $\frac{5}{1}$ in luogo di 5; 2.° col moltiplicare l' intero e l' unità sottoposta per quel numero che si vuol dare per denominatore: così per ridurre gl' interi 7 e 5 a rotti che abbiano per denominatore 3, scritto come sopra $\frac{7}{1}$, $\frac{5}{1}$ si moltiplicherà sopra e sotto per 3, e si avrà $^{21}/_{3}$, $^{15}/_{3}$, espressioni cercate.

56. *Unire un rotto con un intero.* Si moltiplichi l' intero per il denominatore del rotto, si aggiunga al prodotto il numeratore di lui, e si divida la somma per il denominatore del rotto: così per 6 $\frac{3}{4}$ diremo $4\times6=24$, e quindi $24+3=27$, espressione che divisa per 4 dà $^{27}/_{4}$ che è la cercata.

57. *Ridurre più rotti al medesimo denominatore.* La necessità di quest' operazione si presenta spessissimo nel calcolo dei rotti, sia quando si vogliono paragonare fra di loro, sia quando vogliono sommarsi o sottrarsi, come vedremo. Lo spirito della regola consiste nel cambiare i rotti dati in altri, che conservando respettivamente il valore dei primi, abbiano in comune uno stesso denominatore. A tale effetto moltiplico in croce il numeratore del primo per il denominatore del secondo, il numeratore del secondo per il denominatore del primo, e sotto ciascuno dei prodotti scrivo il prodotto dei due denominatori. Così se i rotti dati sieno $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$ moltiplicherò 3 per 7, 5 per 4, ed avrò due prodotti 21, 20: moltiplicherò poi 4 per 7 ed avrò 28 denominatore comune; onde i due rotti ridotti saranno $^{21}/_{28}$, $^{20}/_{28}$.[1]

58. Se poi avrò più rotti moltiplicherò il numeratore di ciascuno per i denominatori di tutti gli altri, e sotto il prodotto così ottenuto scriverò quello di tutti quanti i deno-

[1] È chiaro che questi due nuovi rotti sono respettivamente eguali ai due dati, perchè il primo risulta dal prodotto per 7 dei due termini del rotto $^{3}/_{4}$, e il secondo dal prodotto di 4 per i due termini del rotto $^{5}/_{7}$: e si è già detto (paragrafo 54) che il valor di un rotto non s'altera moltiplicandone i termini per una medesima quantità.

minatori. Così avendosi $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$ moltiplicherò il 5 per 4 e per 7, dicendo 5 via 4 fa 20, 20 via 7 fa 140; poi moltiplicherò il 3 per 6 e per 7, ed avrò 126; in seguito moltiplicherò il 2 per 4 e per 6 ed avrò 48. Infine moltiplicherò insieme i tre denominatori, ed avrò 168. Avremo dunque i tre rotti $^{140}/_{168}$, $^{120}/_{168}$, $^{48}/_{168}$.[1]

59. Si è veduto come un medesimo rotto può esprimersi in un'infinità di maniere tutte fra loro diverse. Spesso, come nel caso della riduzione al medesimo denominatore, torna comodo di trasformare le più semplici in altre più composte; e altrettante volte accade di dover trasformare e ridur le più composte nelle più semplici; e nel modo che col moltiplicare per una data quantità i due termini del rotto si ottiene il primo intento, così col dividerli parimente per una medesima quantità si ottiene il secondo. Così l'espressione più composta $^{12}/_{15}$ si riduce all'altra più semplice $\frac{4}{5}$, dividendo sopra e sotto per 3, come dividendo $^{7}/_{21}$ per 7 si riduce a $\frac{1}{3}$.

60. Ma se dato un rotto qualunque è possibile ridurlo ad una espressione più composta, perchè tutte le volte è possibile moltiplicarne i termini per una qualunque quantità, non così però potrà ridursi ad una espressione più semplice, perchè non in tutti i casi i due termini hanno un fattore comune per cui possan dividersi. In quest'ultima congiuntura il rotto si chiama *irriducibile*.

Per distinguere dunque se un rotto è in questo senso

[1] Quest'operazione che nei casi di un gran numero di rotti è assai fastidiosa, può spesso molto semplicizzarsi, qualora si sappia trovare un numero che sia multiplo di tutti i denominatori. In tal caso basterà successivamente dividere questo numero per ciascuno dei denominatori, e moltiplicare l'un termine e l'altro di ciascun rotto per il quoziente respettivamente ottenuto. Così avendosi da ridurre $^{1}/_{5}$, $^{5}/_{6}$, $^{2}/_{9}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, osserverò che il 90 contiene esattamente tutti i denominatori; dividerò dunque il 90 per 5, per 6, per 9, per 2, per 3, ed avrò i quozienti 18, 15, 10, 45, 30, per il primo dei quali moltiplicherò sopra e sotto $^{1}/_{5}$, per il secondo $^{5}/_{6}$ ec., ed avrò in tal guisa i rotti $^{18}/_{90}$, $^{75}/_{90}$, $^{20}/_{90}$, $^{45}/_{90}$, $^{60}/_{90}$, tutti eguali ai proposti, e tutti collo stesso denominatore.

riducibile o no, ottimo e pronto mezzo sarebbe il poter decomporre i termini in tutti i loro fattori, onde conoscere, se ve ne sieno o no dei comuni ad ambedue. Ma il metodo generale che guida a questa decomposizione essendo alquanto lungo, ecco alcune regole particolari le quali possono essere molto giovevoli in pratica.

I. Ogni numero pari è divisibile per 2: onde finchè i termini di un rotto saranno numeri pari, potranno sempre ridursi alla loro metà; il rotto $^{128}/_{432}$ si riduce a $^{8}/_{27}$ dividendo quattro volte per 2.

II. Ogni numero che finisce in zero è divisibile per 5 e per 10; così il rotto $^{20}/_{90}$ si riduce a $\frac{2}{9}$.

III. Ogni numero che finisce in 5 è divisibile per 5; così $^{15}/_{85}$ si riduce a $^{3}/_{17}$; $^{120}/_{215}$ si riduce a $^{24}/_{43}$.

IV. Ogni numero tale che la somma delle sue cifre sia un multiplo di 3 è divisibile per 3; così il rotto $^{288}/_{351}$ si riduce a $^{96}/_{117}$ e poi a $^{32}/_{39}$. E se di più il numero divisibile per 3 è pari, allora può dividersi per 6. Si può dividere per 9 quando la somma delle sue cifre è multipla di 9.

V. Quando le due ultime cifre di un numero sono divisibili per 4, quel numero può dividersi per 4. Il rotto $^{184}/_{240}$ può dunque ridursi a $^{46}/_{60}$, poi a $^{23}/_{30}$; dopo di che egli è *irriducibile;* il rotto $^{2064}/_{3096}$ può ridursi a $^{516}/_{774}$, poi a $^{172}/_{258}$, (IV) poi a $^{86}/_{129}=\frac{2}{3}$.

VI. Ogni numero è divisibile per 8 quando lo sono le sue tre ultime cifre. Così $^{888}/_{2432}={}^{111}/_{304}$.

VII. Ogni numero è divisibile per 11 quando la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari è 0, ovvero un multiplo di 11. Così $^{6325}/_{9475829}={}^{575}/_{861439}$.

61. Ma vi è un metodo generale fondato su questo principio *che per ridurre alla più semplice espressione un rotto qualunque, bisogna dividere i suoi due termini per il loro massimo comun divisore.*

Ora per trovare il più gran comun divisore possibile di due numeri qualunque, dividete il maggiore per il minore,

e se la divisione riesce senza resto, il più piccolo numero è il più gran comun divisore cercato.

Se dopo la divisione si trova un resto, dividete il più piccolo numero dato per questo resto, e se la divisione si fa senza un nuovo resto, il primo resto è il divisore cercato.

Se si trova un secondo resto, dividete il primo per il secondo, e se la divisione si fa senza resto, il secondo è allora il divisore cercato.

In generale, *il resto che divide esattamente il precedente è il più gran comun divisore cercato.*

Esempio. Si vuol ridurre alla più semplice espressione il rotto $^{91}/_{294}$: 1.° dividete 294 per 91, troverete 21 per resto: 2.° dividete 91 per il resto 21, sarà 7 il secondo resto: 3.° dividete il primo resto 21 per il secondo 7, e non avrete alcun resto. Dunque 7 è il massimo comun divisore di 294, e di 92: 4.° dividete dunque questi due numeri per 7, ed avrete per la più semplice espressione, il rotto $^{13}/_{42} = {}^{91}/_{294}$.[1]

294	3
91	4
21	3
7	

ADDIZIONE DEI ROTTI.

62. Se i rotti da sommarsi hanno il medesimo denominatore, si sommano i loro numeratori, e sotto alla somma si pone il denominatore comune: così $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}+\frac{7}{9}={}^{15}/_{9}$, rotto che schisato per 3, si riduce a $\frac{5}{3}$ ossia a $1\ \frac{2}{3}$. Quest'avvertenza di schisare e di estrarre fuori gli interi, quando il rotto finale è improprio, non deve tralasciarsi sul termine

[1] Riprendiamo queste diverse operazioni e facciamo vedere 1.° che 7 è un divisore comune dei numeri proposti: 2.° che è il più grande di tutti i divisori comuni. Poichè 7 divide 21, deve dunque divider $21 \times 4 = 84$, e perciò anche $84 + 7 = 91$: ma se divide 91 deve anche dividere $91 \times 3 = 273$, e perciò ancora $273 + 21 = 294$; dunque 7 è il divisor comune dei due numeri proposti. Egli è anche il più grande di tutti i divisori comuni; poichè ogni altro numero che dividesse 91 e 294, dovrebbe divider 21 primo resto e 7 secondo resto: ora un numero più grande di 7 non può essere un divisore esatto di 7.

nè di questa nè di veruna delle operazioni seguenti; il che sia detto una volta per sempre.

63. Se i rotti non hanno il medesimo denominatore vi si ridurranno (paragrafo 58) e se ne farà la somma come sopra; così $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{16+18+12}{24}={}^{46}/_{24}={}^{23}/_{12}=1\,{}^{11}/_{12}$.

64. Se poi abbiano da sommarsi interi con rotti, o si sommano gli interi fra loro e da per sè i rotti, come $5\frac{2}{7}+4\frac{1}{3}=9+{}^{13}/_{21}$; oppure si uniscono gli interi ai rotti, come sopra (paragrafo 56), e si opera su di queste frazioni improprie come se fossero proprie: così $2\frac{1}{3}+5\frac{2}{7}=\frac{7}{3}+{}^{37}/_{7}=\frac{49+111}{21}={}^{160}/_{21}=7\frac{13}{21}$.

SOTTRAZIONE DEI ROTTI.

65. Per fare la sottrazione dei rotti si riducono al medesimo denominatore, se vi è bisogno; si prende quindi la differenza dei numeratori, e sotto di essa si pone il denominatore comune; così $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$; ed in egual modo $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$.

66. Talvolta il rotto da sottrarsi è maggiore di quello da cui deve essere sottratto: in tal caso si opera come sopra, se non che la differenza finale dei due numeratori si fa precedere dal segno —, il che indica che l'operazione non dà resto, ma mancanza o difetto.

Così se debbon sottrarsi $\frac{6}{7}$ da $\frac{3}{5}$ avremo $\frac{3}{5}-\frac{6}{7}=\frac{21-30}{35}=-{}^{9}/_{35}$. I risultamenti sotto questa forma si chiamano *negativi*, mentre quelli che non sono preceduti da alcun segno, o lo sono dal segno +, si chiamano *positivi*.[1]

[1] Come il resto positivo, o non preceduto da verun segno mostra che la quantità da cui deve sottrarsi supera la sottraenda, così il resto

67. Dovendo sottrarre un rotto da un intero si riduce l'intero al medesimo denominatore del rotto, e si opera come sopra; così $7-\frac{3}{5}={}^{35}/_{5}-\frac{3}{5}$, onde $\frac{35-3}{5}={}^{32}/_{5}=6\frac{2}{5}$.

Se poi vi sono degli interi con dei rotti, come se da $9\frac{5}{8}$ voglia sottrarsi $4\frac{7}{8}$, in questo caso si opera in due maniere. 1.° Si fa la sottrazione di un rotto dall'altro rotto, e degli interi dagli interi, e se il risultamento della sottrazione dei rotti è negativo, si sottrae da 1, e si pone il resto accanto alla differenza degli interi diminuita di un'unità. Così nell'addotto esempio la differenza degli interi è 5, e quella dei rotti è $-\frac{2}{8}$ ossia $-\frac{1}{4}$, che tolto da 1 resta $\frac{3}{4}$: sarà dunque la differenza cercata $4\frac{3}{4}$. 2.° Si unisce col loro rotto ciascuno dei due interi, formandone due frazioni improprie, queste si sottraggono secondo la regola generale, e si ha il resto cercato. Così riassumendo il proposto esempio si avrà $9\frac{5}{8}-4\frac{7}{8}={}^{77}/_{8}-{}^{39}/_{8}={}^{38}/_{8}={}^{19}/_{4}=4\frac{3}{4}$ come sopra; parimente $3\frac{2}{5}-2\frac{5}{6}={}^{17}/_{5}-{}^{17}/_{6}=\frac{102-85}{30}={}^{17}/_{30}$.

MOLTIPLICAZIONE DEI ROTTI.

68. Il moltiplicatore di un rotto può essere un numero intero o un numero frazionario. Nel primo caso si moltiplica per l'intero il suo numeratore, e si divide il prodotto per il denominatore della frazione. Così ${}^{2}/_{13}.5={}^{10}/_{13}$. Nel secondo caso si moltiplicano i due numeratori l'uno per l'altro, e il loro prodotto si divide per quello dei loro denominatori. Così moltiplicando $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$ si ha ${}^{15}/_{28}$ per prodotto.[1]

negativo o preceduto dal segno — mostra che ne è minore. I segni + e — determinano sempre le qualità contrarie della quantità. Così mentre l'uno accenna per esempio un credito, l'altro mostra un debito.

[1] Il secondo caso abbraccia anche il primo, potendo sempre trasformarsi l'intero in rotto avente per denominatore l'unità. Così ${}^{2}/_{13}.\ 5={}^{2}/_{13}.\ {}^{5}/_{1}$. Quest'avvertenza non è inutile, e può non solo qui, ma anche in tutte le operazioni dei rotti toglier gran parte della confusione, che dalla me-

69. Ogni rotto propriamente detto è minore dell' unità (paragrafo 52), e il prodotto di due di essi deve essere minore del moltiplicando nel rapporto medesimo in cui il moltiplicatore è più piccolo dell' unità. Perciò $\frac{1}{2}$ moltiplicato per $\frac{1}{2}$ dà per prodotto $\frac{1}{4}$, che è minore di $\frac{1}{2}$.

70. *Osservazioni.* I. — Se il moltiplicando e il moltiplicatore fossero numeri interi uniti a dei rotti, si trasformerà ciascuno in un solo rotto, per ridurli al secondo caso di cui abbiamo parlato (paragrafo 56).

Esempi: $3\frac{2}{9}\times 7\frac{1}{3}={}^{29}/_{9}\times{}^{22}/_{3}={}^{638}/_{27}=23\,{}^{17}/_{27}$.

$12\frac{6}{7}\times 30\,{}^{1}/_{90}={}^{90}/_{7}\times{}^{2701}/_{90}={}^{2701}/_{7}=385\frac{6}{7}$

$40\,{}^{3}/_{100}\times 15\,{}^{1}/_{10}={}^{1003}/_{100}={}^{151}/_{10}={}^{151453}/_{1000}=151\,{}^{453}/_{1000}$.

II. Quando i rotti si debbono moltiplicare per numeri, i quali son divisori esatti dei denominatori, si ha subito l'espressione più semplice del prodotto col dividere il denominatore per l'intero, invece di moltiplicare il numeratore. Così ${}^{5}/_{12}\cdot 2=\frac{5}{6}$, ec. [1]

III. Spesso anche il numero moltiplicatore è eguale al denominatore medesimo. Allora il prodotto è eguale al numeratore: così ${}^{3}/_{11}\times 11=3$, ec.

scolanza dei rotti con gli interi potrebbe esser prodotta. Frattanto la ragione delle due esposte regole è facilissima. Poichè ricorrendo al principio della moltiplicaziono si vedrà, che il prodotto deve contenere tante volte il moltiplicando quante il moltiplicatore contiene l' unità; ma nel primo caso il moltiplicatore 5 contiene cinque volte l' unità; bisogna dunque altresì che il prodotto contenga cinque volte il moltiplicando ${}^{2}/_{13}$, e perciò il prodotto sarà ${}^{10}/_{13}={}^{2.5}/_{13}$ Per lo stesso motivo bisogna nel secondo caso cho il prodotto sia ${}^{3}/_{4}$ del moltiplicando, perchè il moltiplicatore è ${}^{3}/_{4}$ dell' unità. Ora ${}^{3}/_{4}$ di ${}^{5}/_{7}$ sono ${}^{15}/_{28}$, poichè il quarto dl ${}^{1}/_{7}$ è ${}^{1}/_{28}$, onde il quarto di ${}^{5}/_{7}$ è ${}^{5}/_{28}={}^{5}/_{7\cdot 4}$; dunque i tre quarti di ${}^{5}/_{7}$ sono ${}^{15}/_{28}$ $={}^{5\cdot 3}/_{7\cdot 4}$. In altro modo. Se in luogo di moltiplicare l ${}^{5}/_{7}$ per ${}^{3}/_{4}$ si fosser dovuti moltiplicare per 3, si doveva scrivere per la prima rogola ${}^{15}/_{7}$ per prodotto: dunque moltiplicandoli per un numoro quattro volte più piccolo del 3, cioè per ${}^{3}/_{4}$, si deve avere un prodotto quattro volte più piccolo di ${}^{15}/_{7}$ cioè ${}^{15}/_{28}$.

[1] Infatti dopo aver moltiplicato il 5 per 2, secondo la regola generale, risulterebbe evidentemente un rotto il cui numeratore e denominatore sarebbe multiplo di 2. Converrebbe dunquo schisarlo e distruggere immediatamente l' operazione già fatta.

IV. Quando debbono moltiplicarsi fra di loro più rotti, si farà il prodotto di tutti insieme i numeratori, e si dividerà per quello di tutti i denominatori. Ma prima dovrà osservarsi se fra i numeratori vi sia alcuna quantità, che si trovi ancora fra i denominatori. In tal caso si toglierà da un luogo e dall'altro, sostituendo invece l'unità. Ciò oltre all'abbreviare l'operazione, porge altresì il vantaggio di condurre ad un risultamento più semplice. Debbano per esempio moltiplicarsi $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, ove il 3 4, e 5 si trovano fra i numeratori e fra i denominatori: porrò dunque

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Anzi quando non vi sia questa concorrenza dei medesimi numeri, ma soltanto s'incontri qualche numeratore che abbia un fattore comune con qualche denominatore, potremo schisare l'uno con l'altro ancorchè appartengano a due rotti distinti. Così $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot{}^{7}/_{10}\cdot{}^{5}/_{14}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}={}^{1}/_{30}$.[1]

DIVISIONE DEI ROTTI.

71. S'incontrano nella divisione dei rotti tre casi diversi: 1.° il dividendo può essere un rotto, e il divisore un numero intero; 2.° può essere numero intero il dividendo, e rotto il divisore; 3° posson essere rotti e il divisore e il dividendo.

In ciascuno di questi tre casi la prima cura dell'operatore esser deve di ben distinguere, e ben situare il dividendo e il divisore, ponendo quello alla sinistra, questo alla destra con la frapposizione dei due punti. Suole usarsi di porre anche qui l'uno sotto dell'altro: ma in questo caso deve darsi alla linea di separazione maggior lunghezza che

[1] La ragione di tutti gli esposti compendi è parimente manifesta. Dopo aver moltiplicato insieme tutti i numeratori e tutti i denominatori si otterrebbe un rotto, i cui termini avrebbero comuni tutti quei fattori, che lo sono ai numeratori e denominatori dei rotti dati. È bene perciò che prima di scendere alla moltiplicazione si tolgan di mezzo questi fattori, e si prevenga il caso di dover toglierli dopo con maggior fatica.

a quelle interposte fra il divisore e il dividendo dei rotti sui quali si opera.

72. Dopo ciò nel primo caso, quando cioè il divisore è intero, si moltiplicherà per il denominatore del dividendo, e si segnerà il prodotto sotto il numeratore. Così, se debbon dividersi $\frac{3}{4}$ per 2, porremo $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.[1]

73. Nel secondo caso, quando è numero intero il dividendo, si moltiplicherà questo numero per il denominatore del divisore, e sotto il prodotto si segnerà il numeratore. Così, se deve dividersi 8 per $\frac{3}{5}$, porremo $8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.[2]

74. Nel terzo caso, quando e il divisore e il dividendo son frazionari, si moltiplicheranno in croce il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore, e il numeratore del divisore per il denominatore del dividendo, e si segnerà il secondo prodotto sotto del primo. Così $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = {}^{14}/_{15}$.[3]

75. *Osservazioni.* I. — Se il divisore o dividendo, o l'uno e l'altro insieme sono interi uniti a rotti, si trasformeranno in un sol rotto, e si opererà come nel 3.° caso; così $4\frac{2}{3} : 2\frac{1}{5} = {}^{14}/_{3} : {}^{11}/_{5} = {}^{70}/_{33} = 2\,{}^{4}/_{33}$. Che se poi si debba dividere un intero assai grande unito ad un rotto per un intero, come per esempio $597\frac{2}{7}$ per 4, invece di unire l'intero al rotto torna comodo dividere il 597 per 4 senza aver riguardo al rotto, e si avrà $149\frac{1}{4}$ per quoto; poi se vi è qualche avanzo, come lo abbiamo nel caso nostro, si unirà al rotto $\frac{2}{7}$ e si formerà $\frac{9}{7}$, che diviso per 4 dà il quoto ${}^{9}/_{28}$; onde il quoziente cercato è $149\,{}^{9}/_{28}$.

[1] Per ben persuadersi della bontà di questa regola, basta riflettere, che dividere una quantità qualunque per 2 è prenderne la metà: ma ${}^{1}/_{8}$ è la metà di ${}^{1}/_{4}$, dunque ${}^{3}/_{8}$ saranno la metà di ${}^{3}/_{4}$.

[2] Infatti se si trattasse di dividere 8 per 3 si dovrebbe scrivere ${}^{8}/_{3}$, dunque dovendo dividersi 8 per ${}^{3}/_{5}$ quantità 5 volte più piccola, dovrà aversi un quoziente cinque volte più grande, che sarà perciò eguale a ${}^{40}/_{3}$.

[3] Se si fosse dovuto dividere ${}^{2}/_{3}$ soltanto per 3 si sarebbe avuto in quoziente ${}^{2}/_{15}$ (1.° caso): dovendo dunque dividersi per ${}^{5}/_{7}$, quantità 7

II. Se i rotti da dividersi hanno lo stesso denominatore, se ne avrà subito il quoziente dividendo l'uno per l'altro i numeratori: così per dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{5}$ basterà scrivere $\frac{3}{4}$.

III. Se il numeratore del dividendo può dividersi senza resto per il numeratore del divisore, si divida per avere l'espressione più semplice; così $^{9}/_{19}$ divisi per $\frac{3}{7}$ danno $^{21}/_{19}$ per quoziente. Lo stesso s'intenda dei denominatori; $\frac{3}{4}$ divisi per $\frac{1}{2}$ danno per quoziente $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

IV. Se i termini dei rotti posson dividersi senza resto, si otterrà subito il quoziente effettuando la divisione; così $^{15}/_{16}$ divisi per $\frac{5}{8}$ danno per quoziente $\frac{3}{2}$.

76. Una porzione di rotto come sarebbe $\frac{3}{5}$ di $\frac{2}{7}$ si chiama rotto di rotto. Benchè questa ricerca implichi una divisione, tuttavia si ottiene per via della semplice moltiplicazione; cioè moltiplicando insieme i due numeratori e i due denominatori, il che nel nostro caso darebbe $^{6}/_{35}$. [1]

DEI ROTTI, O FRAZIONI DECIMALI.

77. Per rotto decimale s'intende *una o più porzioni dell'unità divisa in parti eguali di dieci in dieci volte più piccole*, come quarantacinque centesimi. Ogni numero poi com-

volte più piccola di 3, dovrà aversi un quoziente 7 volte più grande, e che perciò sarà eguale al primo moltiplicato per 7 ossia eguale a $^{14}/_{15}$. E qui pure è da osservarsi conformemente a ciò che abbiamo avvertito nella moltiplicazione, che il primo e secondo caso si riducono facilmente al terzo, con solo dare all'intero la forma di rotto col denominatore 1. Con ciò si eviterà la confusione, che può nascere dalla moltiplicità delle regole. Si noti in fine che come il prodotto dei due rotti è minore di ciascuno dei due fattori, così per la ragione opposta il loro quoziente sarà sempre maggiore del dividendo.

[1] È chiaro che quest'espressione $^{3}/_{5}$ di $^{2}/_{7}$ significa che bisogna prendere tre volte il quinto di $^{2}/_{7}$. Bisogna dunque primieramente dividere $^{2}/_{7}$ per 5, che fa $^{2}/_{7.5}=^{2}/_{35}$: e poi moltiplicare questo quoziente $^{2}/_{35}$ per 3, il che darà $^{6}/_{35}$.

Può osservarsi frattanto che si fosse trattato di prendere $^{2}/_{7}$ di $^{3}/_{5}$ si avrebbe egualmente avuto in forza della medesima regola $^{6}/_{35}$. Onde non vi è differenza alcuna fra $^{2}/_{7}$ di $^{3}/_{5}$, e $^{3}/_{5}$ di $^{2}/_{7}$

posto di un numero intero e di una frazione decimale si chiama *numero decimale.* Così l'espressione quattro interi e venticinque centesimi indica un numero decimale. Per distinguere la frazione decimale dagli interi, si pone dopo questi una virgola chiamata *virgola decimale;*[1] e la prima cifra che viene immediatamente dopo la virgola rappresenta i decimi; la seconda i centesimi; la terza i millesimi; e le successive cifre i diecimillesimi, i centomillesimi, i milionesimi, i diecimilionesimi, i centomilionesimi, i bilionesimi ec., che sono nella numerazione generale i diversi ordini che fanno séguito a quelli delle unità, diecine, centinaia ec.

78. Per iscrivere un numero, o una frazione decimale si segnano prima gli interi, o lo zero che ne fa le veci, quindi si pone la virgola, e dopo questa la parte decimale. Volendo, per esempio, rappresentare quattro interi e venticinque centesimi scriverò 4,25. Che se la frazione decimale mancasse di qualche ordine si dovranno scrivere degli zeri in loro vece, affinchè ciascuna cifra conservi il suo valore. Vogliasi scrivere trentasette diecimillesimi. Scrivo 37; ma poichè la cifra 7 deve occupare il quarto posto, scrivo due zeri a sinistra del 3, poi la virgola, infine uno zero in luogo degli interi, e così la frazione proposta verrà rappresentata da 0,0037. Parimente per scrivere dugentonove centomillesimi, comincio dallo scrivere 209; ma siccome per esprimere i centomillesimi occorrono 5 cifre decimali e il numero scritto non n'ha che tre, pongo due zeri a sinistra di 209, poi la virgola e infine uno zero in luogo degli interi; e la frazione viene espressa da 0,00209. Se poi si dovesse scrivere trecentomila cinquantadue centesimi, scriverei 300052; e poichè i centesimi occupano il secondo posto, separerei con una virgola le due ultime cifre a destra e avrei 3000,52.

[1] Oggi alcuni in luogo della virgola decimale usano un punto (·) posto in alto, omettendo di segnare anche lo zero quando mancano gli interi. Così invece di scrivere 0,25 scrivono semplicemente ·25; invece di 3,468 scrivono 3·468.

79. Un numero, o una frazione decimale si legge pronunziando prima gli interi, o lo zero che ne fa le veci, poi il numero che sta a destra della virgola come se fosse intero, esprimendo infine quell'ordine di unità frazionaria rappresentata dall'ultima cifra. Così 5,4 si legge cinque interi e quattro decimi; 0,29 si legge zero interi e ventinove centesimi; 3,0004 si legge tre interi e quattro diecimillesimi; 0,0034506 si legge zero interi e trentaquattromila cinquecentosei diecimilionesimi. Un numero decimale si può anche leggere come se fosse un numero solo dicendo l'ultima specie. Così 256,0402 si può leggere due milioni cinquecentosessantamila quattrocentodue diecimillesimi.

80. La forma delle frazioni decimali è più semplice di quella delle frazioni ordinarie, perchè nelle prime il denominatore è sottinteso, essendo sempre uguale all'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre decimali. Di qui appunto l'uso frequente di chiamare *rotti decimali* quelli che hanno per denominatore o 10, o 100, o 1000 ec. Questa forma più semplice unita ad alcune speciali proprietà di che godono i decimali e che ora vengono esposte, fa sì che nei calcoli diasi a questi la preferenza sopra i rotti comuni.

I. Due, o più decimali con lo stesso numero di cifre dopo la virgola hanno lo stesso denominatore. Tali sono i rotti 0,428; 0,002.

II. Il valore di un decimale non si altera, se si aggiungono o si tolgono più zeri alla destra delle cifre decimali. Così 0,5 è uguale a 0,50; ovvero a 0,500.

III. Per ridurre due o più decimali al medesimo denominatore basta aggiungere alla loro destra quel numero di zeri che è necessario, affinchè tutte le frazioni contengano lo stesso numero di cifre decimali, ossia basta pareggiare il numero di queste con degli zeri. Così per ridurre allo stesso denominatore 0,45 e 0,69438 scriverò 0,45000 e 0,69438, perchè alla frazione 0,45 mancano tre cifre decimali per averne cinque come l'altra.

IV. Di due rotti decimali il maggiore è quello che ha

prima dell'altro dopo la virgola cifra maggiore; perchè ridotti ambedue allo stesso denominatore, quello che comincia con cifre maggiori avrà in tal caso un numeratore più grande e per conseguenza sarà maggiore dell'altro. Così delle due frazioni decimali 0,87 e 0,39568 la prima è maggiore della seconda: egualmente la frazione 0,5562 è maggiore dell'altra 0,553427.

V. Un numero, o un rotto decimale si moltiplica per 10, 100,1000 ec., avanzando la virgola verso destra di 1, 2, 3 ec. posti. Volendo, per esempio, moltiplicare 15,34562 per 10, o per 100, o per 1000 avremo a seconda dei casi 153,4562; 1534,562; 15345,62.

VI. Al contrario un decimale si divide per 10, o per 100, o per 1000 avanzando la virgola di 1, 2, 3, ec. posti verso sinistra; e allorchè le cifre del decimale proposto non siano sufficienti, si supplirà a tal difetto con degli zeri posti sempre a sinistra, e separati per mezzo di una virgola da un altro zero, che terrà il luogo degl'interi. Se il numero decimale 15,34562 si vuol dividere per 10, 100, 1000 scriveremo 1,534562; oppure 0,1534562; o infine 0,01534562.

Osservazione. — Queste due ultime regole si applicano egualmente ai numeri interi, nei quali la virgola può immaginarsi come sottintesa dopo la cifra delle unità semplici, e seguita da un numero qualunque di zeri.

81. Se ad un numero, o rotto decimale si tolgono le ultime cifre, l'errore che ne deriva sarà tanto più piccolo quanto è maggiore il numero delle cifre decimali che restano. Così se il numero decimale 3,141592653 si riduce a 3,1415926; oppure a 3,14159265, nel primo caso commettiamo un errore in meno di 53 mille milionesimi, nel secondo di soli 3 mille milionesimi. Ma poichè siffatti errori sono tanto piccoli da non produrre notevole alterazione nei calcoli; così si suole generalmente rigettare tuttociò che rimane oltre la quinta, e talvolta anche oltre la quarta e la terza cifra decimale: onde avendosi un decimale con moltissime cifre si potranno trascurare tutte quelle che sono

al di là della settima, e ove occorra, anche quelle al di là della sesta, quinta e quarta decimale, rimanendo sempre un numero assai prossimo al vero.

Osservazione. — Se la prima delle cifre trascurate è uguale o maggiore di 5, si aumenterà di un'unità l'ultima delle cifre ritenute per avere così un numero anche più vicino al vero: ciò dicesi comunemente *correggere l'errore.* Se, per esempio, nella frazione 0,23469 si trascurano le ultime due cifre, sarà minore errore scrivere 0,235 che 0,234. Infatti essendo 0,235=0,23500; e 0,234=0,23400, il rotto dato 0,23469 differisce da 0,235 di 31 centomillesimi e da 0,234 di 69 centomillesimi: ne differisce dunque meno nel primo, che nel secondo caso.

DELL'ADDIZIONE DEI DECIMALI.

82. Per sommare i decimali, si scrivono l'uno sotto l'altro, in maniera che le virgole si trovino nella stessa colonna, ottenendosi per tal guisa che anche le cifre del medesimo ordine si corrispondano in colonna; quindi si sommano nel modo stesso che se fossero interi, segnando la virgola nella somma totale sotto la colonna di tutte le altre, come può vedersi nel seguente esempio:

$$\begin{array}{r} 4560,69134 \\ 7,00472 \\ 0,009 \\ 461,4016 \\ \hline 5029,10666 \end{array}$$

Osservazioni. I. — I decimali dati a sommare non sono stati ridotti al medesimo denominatore pareggiandone le cifre decimali per mezzo di zeri, perchè l'aggiunta di questi non avrebbe per nulla influito sul resultato finale.

II. Se insieme ai decimali si dovessero sommare dei numeri interi non seguìti da frazioni decimali, si scrive-

rebbero al solito, avvertendo di porre le unità semplici al loro posto, come si vede nel seguente esempio:

```
 34,253
528
  0,24
-------
562,493
```

III. La riprova dell'addizione nei decimali si fa come negl'interi.

DELLA SOTTRAZIONE DEI DECIMALI.

83. Per fare la sottrazione dei decimali scrivo al solito come nell'addizione i numeri l'uno sotto l'altro, ed opero affatto come se fossero numeri interi. Che se la quantità sottraenda abbia più cifre decimali che l'altra da cui deve sottrarsi, si aggiungeranno a questa o espressamente o tacitamente altrettanti zeri a destra, quanti ne occorreranno perchè le cifre decimali restino pareggiate. *Esempi.*

```
6,04864          470,49
0,19             140,57648
-------          ---------
5,85864          329,91352
```

Osservazione. — La riprova della sottrazione nei decimali si fa come negl'interi.

DELLA MOLTIPLICAZIONE DEI DECIMALI.

84. I decimali si moltiplicheranno assolutamente come gl'interi: fatto poi il prodotto si dovranno separare con la virgola tante cifre da destra a sinistra, quante cifre decimali si trovano ne'due fattori.

85. Che se il prodotto risulti con meno cifre di quante cifre decimali sono in ambedue i fattori, si supplirà con degli zeri che si porranno a sinistra; e avanti a questi se

ne porrà uno di più, separato dai rimanenti con una virgola, e che terrà il luogo degl'interi.[1] *Esempi.*

```
 53,6×324          3,2476×0,143
 2144               97428
 1072              129904
1608               32476
17366,4            0,4644068

 518×4,6           31,42×0,000203
 3108               9426
2072               6284
2382,8             0,00637826
```

Osservazione. Quando i due fattori contengono molte cifre decimali e nel prodotto non se n'esige un egual numero; può risparmiarsi molta fatica, se supposto nell'uno o nell'altro fattore uno stesso numero di cifre decimali (quando ciò non accada, si supplisca con la regola data al par. 80, III), e aggiunti tanti zeri al moltiplicando, quante sono le cifre degl'interi del moltiplicatore più una, si scriva sotto di lui il moltiplicatore con le cifre tutte in ordine rovesciate: e quindi nel moltiplicare si trascuri quella

```
96,333333×34,458333
96,333333000
  33385443
288999999000
 38533333200
  3853333320
   481666665
    77066664
     2889999
      288999
       28899
3319,48606746
```

[1] I decimali che si separano nel prodotto rappresentano gli zeri che seguono l'unità del suo denominatore (par. 80), i quali dovendo essere tanti quanti sono quelli che si trovano nei denominatori dei due fattori, cioè quante sono le loro cifre decimali, ne verrà che vi dovrà essere eguaglianza tra il numero delle cifre decimali del prodotto e quello delle decimali dell'uno e dell'altro fattore prese insieme.

porzione del moltiplicando che resta alla destra di ciascuna delle cifre per cui si moltiplica: avvertendo che nel segnare i prodotti non si deve *scalare*, ma porre tutte le classi corrispondenti in colonna; il tutto precisamente come nell'esempio avanti. In ultimo si stabilirà nella somma finale la virgola in modo, che restino separate tante cifre decimali, quante ne sono in ciascuno dei fattori più due, e le ultime due si rigetteranno con le consuete cautele.[1]

Osservazione.—Nella moltiplicazione dei decimali hanno luogo le stesse riprove che in quella degl'interi.

DELLA DIVISIONE DEI DECIMALI.

86. La divisione dei decimali differisce da quella degl'interi in questo solo, che bisogna separare nel quoziente tante cifre a destra, quante cifre decimali di più sono nel dividendo che nel divisore.

87. Nella divisione dei decimali considereremo i quattro casi principali, a cui possono ridursi tutti gli altri.

1.° caso. Sia il dividendo un numero intero e il divisore una frazione o un numero decimale. In questo caso se non voglio cifre decimali in quoziente, pongo dopo gl'interi del dividendo una virgola e poi tanti zeri quante sono le cifre decimali del divisore; e siccome le cifre ottenute in quoziente rappresenteranno interi, non segnerò la virgola. Se poi voglio in quoziente una, due, tre ec. cifre decimali, oltre gli zeri che già sono stati aggiunti al dividendo ne

[1] È chiaro il fondamento di questa regola. I prodotti che si trascurano delle cifre del moltiplicando, le quali restano alla destra della cifra moltiplicatrice, darebbero luogo a delle colonne, la cui somma porterebbe inutilmente in prodotto le cifre decimali superflue, che debbono radiarsi. Operando secondo il prescritto metodo le cifre decimali di soprappiù si riducono a sole due conservate a bella posta, perchè l'omissione delle loro colonne non porti alterazione su quelle, che fanno nascere i decimali da conservarsi.

scriverò uno, due, tre ec., in generale tanti quante cifre decimali deve avere il quoziente. *Esempi.*

Vogliasi il quoziente senza cifre decimali di 4596 per 3,25. Dopo gl' interi del dividendo segno due zeri, ed eseguisco la divisione come di fianco.

```
             1414
          ---------
          4596,00
   3,25 / 1346
            460
           1350
             50
```

Vogliasi il quoziente di 258 per 0,475 con due cifre decimali. Dopo il dividendo 258 scrivo prima tre zeri per pareggiare le cifre decimali del divisore, poi altri due per avere in quoziente due cifre decimali, come si vede nell'esempio di contro.

```
               543,15
           -----------
           258,00000
   0,475 / 2050
           1500
            750
           2750
            375
```

2.° caso. Sia il dividendo una frazione decimale, e il divisore sia sempre una frazione o un numero decimale. In questo caso se il dividendo non contiene il divisore, aggiungeremo secondo il solito al dividendo tanti zeri quanti ne bisognano, perchè possa contenerlo; avvertendo inoltre che se in quoziente non vengono tante cifre decimali quante se ne debbono separare, si segneranno a sinistra nel quoziente tanti zeri, quanti sono necessari, poi la virgola, quindi un altro zero in luogo degl'interi.

Debba dividersi 0,879 per 6,0039. Prima di eseguire la divisione aggiungo uno zero al dividendo per pareggiare le cifre decimali del divisore, poi un altro zero perchè il dividendo mi contenga il divisore, quindi un altro zero per avere due cifre decimali in quoziente; come si vede praticato nell'esempio.

```
                  0,14
            ----------
   6,0039 / 0,879000
              278610
               38454
```

In quoziente ho segnato zero in luogo degl'interi.

Debba dividersi 0,0009 per 0,07859. Aggiungo tre zeri

al dividendo perchè mi contenga il divisore; ed opero come nell'esempio appresso. In quoziente ho segnato due zeri, perchè doveva separare due cifre decimali e mettere zero in luogo degl'interi.

```
              0,01
0,07859 / 0,0009000
              1141
```

3.° caso. Sia il dividendo un numero decimale, e il divisore sia una frazione o un numero decimale, come se si debba dividere 432,568 per 0,25; ovvero 9,964984 per 9,87. *Esempi*

```
          1730,2                  1,0096
0,25 / 432,568          9,87 / 9,964984
       182                       9498
        75                        6154
         68                        232
         18
```

4.° caso. Sia il dividendo una frazione o un numero decimale e il divisore sia un numero intero, come se s'avesse a dividere 0,1 per 789; ovvero 235,70 per 130. *Esempi.*

```
        0,0001                 1,81307
789 / 0,1000          130 / 235,70000
         211                 1057
                              170
                               400
                                1000
                                  90
```

Osservazioni. — I. Gli zeri che in alcuni casi sono stati aggiunti al dividendo possono omettersi, e scriversi soltanto volta per volta a ciascun dividendo parziale.

II. — Nella divisione dei decimali ottenendosi un resto, o le cifre già segnate in quoziente si credono sufficienti e allora si trascura il resto; ovvero non reputandole tali, si aggiungeranno al solito, o s'immagineranno aggiunti alla

destra del dividendo degli zeri; i quali abbassati ad uno ad uno faranno sì che o il resto sparisca, o che si abbiano in quoziente tante cifre decimali, per cui si possa trascurare il resto come quantità piccolissima. Si avverta però che se un tal resto è maggiore della metà del divisore, dovrà aumentar di 1 l'ultima cifra del quoziente per correggere l'errore. *Esempio.*

Debba dividersi 721,342 per 2,91. Considerando le sole cifre date si avrebbe in quoziente 247,8 col resto 244. Ma se aggiungo uno zero alla destra del resto 244 ho novamente da dividere 2440 per 2,91, la qual divisione dà l'altra cifra 8 per il quoziente e il resto 112. A cui aggiunto un altro zero, e diviso il numero così formato per il solito divisore,

```
             247,88384
2,91 / 721,342
        1393
         2294
          2572
           2440
            1120
             2470
              1420
               256
```

ottengo l'altra cifra 3 per il quoziente e il nuovo resto 247. Così facendo per due altri resti successivi ho di quoziente 247,88384 e per resto 256. Il quale essendo maggiore della metà del divisore, correggerò l'errore, aumentando di 1 l'ultima cifra 4 del quoziente ottenuto, il quale in conseguenza sarà per approssimazione 247,88385.[1]

[1] Il quoziente di due rotti equivale, come si sa, al prodotto del numeratore del dividendo nel denominatore del divisore, diviso per quello del numeratore del divisore nel denominatore del dividendo; ovvero per esprimere la cosa più semplicemente, corrisponde al quoziente dei due numeratori, diviso per quello dei denominatori. Nel nostro caso i numeratori sono espressi dalle cifre dei decimali dati; i denominatori sono rappresentati dall'unità seguita da tanti zeri quante son cifre dopo la virgola nei due stessi decimali, le quali se, come è supposto, sieno in maggior numero nel dividendo che nel divisore, il quoziente dell'uno per l'altro sarà sempre l'unità accompagnata da altrettanti zeri quanta è la differenza fra esse cifre decimali; onde dividendo per questo quoziente quello dei numeratori, avremo per quoziente totale quello stesso dei numeratori con tante cifre decimali, quanta è appunto la differenza suddetta.

Osservazione. — La divisione dei decimali va soggetta alle medesime riprove che quella degl' interi.

RIDUZIONE DEI ROTTI COMUNI IN DECIMALI E DEI DECIMALI IN ROTTI COMUNI.

88. Tutti i rotti ordinari possono trasformarsi in decimali o perfettamente eguali, o approssimati quanto si vuole. Ecco la regola per ridurre i rotti comuni in decimali: *si divide per il denominatore della frazione il suo numeratore seguito da quanti zeri vogliamo in forma decimale.* Esempio.

Debba ridursi a decimale il rotto comune $^3/_8$. Prendo il 3 come dividendo, a cui aggiungo o immagino aggiunti degli zeri in forma decimale, separati cioè dall' intero 3 con una virgola, e divido il numero così formato per 8 denominatore della frazione proposta, e pongo al solito uno zero in luogo degl' interi. Scriverò dunque $^3/_8={}^{3,000\cdots}/_8=0,375$. Operando nello stesso modo troverò $^1/_2={}^{1,0}/_2=0,5$; $^1/_4={}^{1,0}/_4=0,25$; $^4/_5={}^{4,0}/_5=0,8$.

Queste frazioni decimali 0,375; 0,5 ec. esprimendo esattamente la respettiva frazione ordinaria si dicono *esatte* o *finite.*[1]

Ciò più facilmente s' intenderà tenendo dietro al seguente esempio. Sappiamo che $6,9345={}^{69345}/_{10000}$, e che $2,3115={}^{23115}/_{10000}$. Dunque $^{6,9345}/_{2,3115}={}^{69345}/_{10000}:{}^{23115}/_{10000}={}^{69345}/_{23115}:{}^{10000}/_{10000}={}^{693450000}/_{231150000}=3$.

Il quoziente per approssimazione con una cifra decimale si dice *a meno di un decimo;* con due cifre decimali *a meno di un centesimo* ec.; il che significa che esso differisce dal vero quoziente di un errore minore di un decimo, di un centesimo ec.

[1] La trasformazione di un rotto comune a decimale dipende da questi tre principj:

1.° Il valore di un rotto non si altera aggiungendo al numeratore quanti zeri si vogliono in forma decimale:

2.° Il valore di un rotto non si altera dividendone i termini per il denominatore del rotto medesimo:

3.° Qualunque quantità divisa per l' unità rappresenta quella quantità stessa.

89. Accade però spesse volte che per quanti zeri si aggiungano al numeratore, la divisione non termina mai: così la frazione $^2/_3$ ridotta in decimali dà 0,666.... all'infinito. Parimente la frazione $^5/_6$ si trasforma nella frazione decimale 0,83333...; la frazione $^1/_7$ nell'altra 0,142857142857.... Queste frazioni decimali che vanno all'infinito e nelle quali compariscono le medesime cifre disposte nel medesimo ordine, si dicono *periodiche*. Sono *periodiche semplici* se il periodo comincia subito dopo la virgola, come nella frazione 0,666...; *periodiche miste*, se il periodo non comincia subito dopo la virgola, come nella frazione 0,8333.... Per periodo poi s'intende l'insieme delle cifre che si ripetono costantemente, e può essere costituito da una o più cifre.[1] Incontrandoci in simili frazioni decimali è inutile continuare l'operazione dopo aver trovato il periodo; ma basta ritenere quel numero di cifre decimali che si crede opportuno secondo la natura dei calcoli, e correggere l'errore, se la prima delle cifre trascurate è uguale o maggiore di 5. Così si otterrà per approssimazione:

$^4/_3$=1,3333....
$^4/_{11}$=0,3636....
$^1/_7$=0,142857142857....
$^5/_6$=0,8333....
$^5/_{36}$=0,13888....

[1] Il periodo dovrà necessariamente comparire prima che il numero dei resti eguagli le unità del divisore. Così delle frazioni $^1/_7$ i resti dovendo essere tutti minori del divisore 7, non potranno essere che sei differenti tra loro, cioè, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dunque almeno al settimo luogo deve necessariamente presentarsi uno dei resti già comparsi e nascer quindi il periodo.

Per indicare il periodo alcuni hanno oggi introdotto l'uso di scrivere un punto al di sopra della prima e dell'ultima cifra del periodo medesimo. Così invece di scrivere 0,666.... scrivono ·$\dot{6}$; invece di scrivere 0,142857142857.... scrivono ·$\dot{1}4285\dot{7}$; invece di scrivere 0,8333.... scrivono ·8$\dot{3}$. Il punto avanti alle cifre 6, 1, 8 denota che mancano gl'interi, come già è stato detto in un'altra nota.

SISTEMA ANTICO

DEI PESI E DELLE MISURE

IN TOSCANA.

Tavola I.

MONETE PRINCIPALI.

—

	lire t.	soldi	denari	lire it.
Lo Scudo corrisponde a .	7	140	1680	5,88
La Lira	—	20	240	0,84
Il Soldo	—	—	12	0,042
Il Danaro	—	—	1	0,0035
Il Fiorino	1 $^2/_3$	33 $^1/_3$	400	1,40

Tavola II.

Valore in lire, soldi e denari delle antiche Monete di rame d'argento e d'oro, e loro corrispondenza all'altra unità monetaria sotto il nome di Fiorino e alla Lira italiana.[1]

	lir. t.	soldi	denari	fiorini	cent.	lire it.
Quattrino	—	—	4	—	01	0,014
Duetto	—	—	8	—	02	0,028
Soldo	—	—	12	—	03	0,042
Crazia.	—	1	8	—	05	0,07
Moneta di due crazie . . .	—	3	4	—	10	0,14
Mezzo paolo, o madonnino, o siano crazie 4	—	6	8	—	20	0,28
Paolo, o siano crazie 8 . . .	—	13	4	—	40	0,56
Lira, o siano crazie 12 . . .	—	20	—	—	60	0,84
Moneta di Paoli 2	1	6	8	—	80	1,12
Testone, o siano Paoli 3 . .	2	—	—	1	20	1,68
Mezzo Frances. o siano Paoli 5	3	6	8	2	—	2,80
Francescone, o siano Paoli 10	6	13	4	4	—	5,60
Scudo o ducato cor. Paoli 10.	7	—	—	4	20	5,88
Pezza, moneta ideale usata nella Piazza di Livorno. . .	5	15	—	3	45	4,83
Moneta coi ritratti del Re e della Regina d'Etruria. . .	10	—	—	6	—	8,40
Mezza moneta coi 2 sudd. ritr.	5	—	—	3	—	4,20
Zecchino fiorentino, Francesconi 2, o siano Paoli 20. .	13	6	8	8	—	11,20
Doppia d'Italia, Francesconi 3 o siano Paoli 30	20	—	—	12	—	16,80
Ruspone, Doppie 2, Zecchini 3, Francesconi 6	40	—	—	24	—	33,60
Moneta d'oro di Paoli 200 . .	133	6	8	80	—	112,00

[1] In questa tavola tutti i termini in lire, soldi e denari o in fiorini e centesimi che si trovano sulla stessa linea formano una unità della specie accennata nella prima colonna.

Tavola III.

MISURE LINEARI E ITINERARIE.

—

	braccia	soldi	quattrini	denari	misure metriche decimali
Il Miglio corris. a	2833 1/3	56666 2/3	170000	680000	Cm. 1,65361
La Pertica	5	100	300	1200	m. 2,91813
La Canna	4	80	240	960	m. 1,3345
Il Passetto	2	40	120	480	m. 1,16726
Il Braccio	—	20	60	240	m. 0,583626
Il Soldo .	—	—	3	12	cm. 2,91813
Il Quattri.	—	—	—	4	mm. 9,7271
Il Denaro	—	—	—	1	mm. 2,431775

Tavola IV.

MISURE DI CAPACITÀ.

—

		sacca	staia	quarti	mez.	quar.	litri
Aridi	Il Moggiò corrisponde a	8	24	96	768	1536	584,75864
	Il Sacco.	—	3	12	96	192	73,08838
	Lo Staio	—	—	4	32	64	24,36286
	Il Quarto	—	—	—	8	16	6,09072
	La Mezzetta	—	—	—	—	2	0,76134
	Il Quartuccio. . . .	—	—	—	—	1	0,38067

			barili	fias.	bocca.	mez	quar.	litri
Liquidi.	Vino	La soma corrisponde a	2	40	80	160	320	91,168
		Il Barile	—	20	40	80	160	45,584
		detto pesa libbre 133 e once 4 d'umido						
		Il Fiasco	—	—	2	4	8	2,2792
		detto pesa libbre 6 e once 8 d'umido .						
		Il Boccale	—	—	—	2	4	1,1396
		La Mezzetta . . .	—	—	—	—	2	0,5698
		Il Quartuccio . . .	—	—	—	—	1	0,2849
	Olio	La soma	2	32	64	128	256	66,85782
		Il Barile	—	16	32	64	128	33,42891
		detto pesa libbre 88 d'umido						
		Il Fiasco	—	—	2	4	8	2,08931
		detto pesa libbre 5 e once 9 d'umido .						
		Il Boccale	—	—	—	2	4	1,04466
		La Mezzetta . . .	—	—	—	—	2	0,52233
		Il Quartuccio . . .	—	—	—	—	1	0,26116

Tavola V.

MISURE CUBICHE DI SOLIDITÀ.

—

		Steri
Per il legname da costruzione	Il Traino=braccia cube . . . 2	0,796
	Il Braccio cubo=bracciola . . 6	0,138794
Per il legname da ardere	La Catasta[1] Brac. cube 24	4,771
	La mezza Catasta, Id. . 12	2,385
	Il terzo, Id. 8	1,590

[1] La Catasta era lunga Braccia 6, alta Br. 2 e larga Br. 2; e la mezza Catasta lunga Br. 3, alta Br. 2 e larga Br. 2.

Tavola VI.

MISURE DI SUPERFICIE AGRARIE.

—

	Braccia quadre	Ari
Il quadrato è 10 Tavole e corrisp. a .	10000	34,0619
La Tavola è 10 Pertiche o Canne . .	1000	3,40619
La Pertica è 10 Deche	100	0,34062
La Deca	10	0,0340619
Il Braccio quadro.	1	mq. 0,34062

Tavola VII.

PESI.

—

	libbre	once	denari	grani	peso metrico
La Libbra corrisponde a .	—	12	288	6912	g. 339,542
L'Oncia	—	—	24	576	28,29517
Il Denaro	—	—	—	24	1,17897
Il Grano	—	—	—	1	0,04912
Il Peso	25	—	—	—	Cg. 8,489
Il cantaro { Salumi	160	—	—	—	54,326
Il cantaro { Lana					
Il cantaro { Zucchero	151	—	—	—	51,271
Il cantaro { Comune	150	—	—	—	50,931

Tavola VIII.

DIVISIONE DEL TEMPO.

—

	mesi	giorni	ore	minuti	minuti secondi
L'Anno mercantile è di	12	360	8640	518400	31104000
Il Mese mercantile . .	—	30	720	43200	2592000
Il Giorno	—	—	24	1440	86400
L'Ora	—	—	—	60	3600
Il Minuto	—	—	—	—	60

L'Anno comune corrente è di giorni 365. L'Anno bisestile è di giorni 366.

Tavola XIII.

Fiaschi, boccali, mezzette e quartucci, misure a olio, ridotte a rotti decimali di barile.

—

Fiaschi	1	= 0,062500	Fiaschi	10	= 0,625000
	2	125000		11	687500
	3	187500		12	750000
	4	250000		13	812500
	5	312500		14	875000
	6	375000		15	937500
	7	437500	Boccali	1	031250
	8	500000	Mezzette	1	015625
	9	562500	Quartucci	1	007812

Tavola XIV.

Sacca, staia e quarti ridotti a rotti decimali di moggio.

—

Sacca	1	= 0,125000	Sacca	7	= 0,875000
	2	250000	Staia	1	041667
	3	375000		2	083333
	4	500000	Quarti	1	010417
	5	625000		2	020833
	6	750000		3	031250

Tavola XV.

Staia e quarti ridotti a rotti decimali di sacco.

—

Staia	1	= 0,333333	Quarti	1	= 0,083333
	2	666667		2	166667
				3	250000

Tavola XVII.

Mesi e giorni ridotti a rotti decimali d'anno.

Mesi	1	= 0,083333	Giorni	10	= 0,027778
	2	166667		11	030556
	3	250000		12	033333
	4	333333		13	036111
	5	416667		14	038889
	6	500000		15	041667
	7	583333		16	044444
	8	666667		17	047222
	9	750000		18	050000
	10	833333		19	052778
	11	916667		20	055555
Giorni	1	002778		21	058333
	2	005556		22	061111
	3	008333		23	063889
	4	011111		24	066667
	5	013889		25	069444
	6	016667		26	072222
	7	019444		27	075000
	8	022222		28	077778
	9	025000		29	080556

VECCHIO SISTEMA

DEI PESI E DELLE MISURE

NELLE VARIE PARTI D'ITALIA.

Tavola I.

PRINCIPALI MONETE D'ITALIA [1]

	Denominazione delle Monete
Piemonte. . . .	Doppia di Savoia. . . . .
»	Quadruplo di Genova. . . . .
»	Carlino. . . . .
»	Mezzo carlino. . . . .
»	Doppietta. . . . .
»	Scudo vecchio di Piemonte. . . . .
»	Scudo di Sardegna. . . . .
»	Mezzo scudo. . . . .
»	Quarto di scudo . . . .
»	Lira di 20 soldi, ciascuno di 12 danari. . .
»	Mezza lira. . . . .
»	Reale . . . .
»	Mezzo reale. . . . .
»	Un soldo. . . . .
Lombardo-Veneto. .	Fiorino. . . . .
»	Doppio fiorino. . . . .
»	Tallero. . . . .
»	Doppio tallero. . . . .
»	Quarto di fiorino. . . . .
»	Pezzo da 10 centesimi di fiorino. . . . .
»	Lira austriaca o svanzica di novo conio. .
»	» » di vecchio conio.
»	Pezzo da tre Carantani. . . . .
Parma.	Doppia. . . . .
»	Ducato. . . . .
»	Mezzo ducato. . . . .
»	Pezzo da 6 lire. . . . .
»	Pezzo da 20 soldi di Parma . . . . . .
»	Pezzo da 10 soldi di Parma. . . . . . .

[1] In questa e nelle seguenti tavole non è riprodotto il Sistema Toscano perchè esposto a parte.

E LORO RAPPORTO COLLE NUOVE.

Metallo	Peso in grammi	Titolo	Valore
Oro	9,116	905	28,45
»	25,214	909,5	79,00
»	16,053	891	50,00
»	8,027	891	25,00
»	3,210	891	10,00
Argento. . . .	35,164	904	7,10
»	23,587	895	4,80
»	11,793	895	2,40
»	5,897	895	1,20
Eroso-misto. . .	. .	. .	0,40
»	. .	. .	0,20
»	. .	. .	0,48
»	. .	. .	0,24
Rame.	. .	. .	0,02
Argento. . . .	12,345679	900	2,46913
»	. .	. .	4,93826
»	. .	. .	3,68
»	. .	. .	7,35
Eroso-misto . .	. .	. .	0,61 $^{59}/_{81}$
»	. .	. .	0,24
»	. .	. .	0,86 $^{34}/_{81}$
»	. .	. .	0,83 $^{77}/_{81}$
»	. .	. .	0,42 $^{28}/_{81}$
Oro.	7,141	891	21,92
Argento. . . .	25,704	902	5,15
»	12,852	902	2,525
»	7,344	833	1,36
Eroso-misto. . .	. .	. .	20
»	. .	. .	10

Segue

	Denominazione delle Monete
Modena	Doppia
»	Scudo d' Ercole III (proxima soli)
»	Detto più moderno (Dextera Domini)
»	Scudo di Francesco III
»	Ducato
»	Scudo dell' Aquila
»	Quarantana
»	Lira modenese
Due Sicilie	Pezzo di 6 Ducati
»	Onza nuova di 3 Ducati
»	Onza vecchia
»	Ducato di Carlo VI
»	Piastra da 12 carlini = 12 tari = 120 grani
»	Mezza piastra
»	Carlino napoletano o Tarì siciliano
Roma	Scudo di Gregorio XVI
»	Doppia nuova di Pio VII
»	Scudo di 100 Baiocchi
»	Scudo = 100 Baiocchi
»	Mezzo scudo = 50 Baiocchi
»	Testone o tre paoli
»	Papetto o due paoli
»	Paolo o pezzo da 10 Baiocchi
»	Mezzo paolo
»	Pezzo da 5 Baiocchi
»	Pezzo da 2 Baiocchi
»	Baiocco

la Tavola I.

Metallo	Peso in grammi	Titolo	Valore
Oro.	6,337	895 $^4/_5$	18,011
Argento. . . .	27,693	910	5,60
»	28	910	3,87
»	28,968	861	5,54
Eroso misto. . .	. .	. .	2,80
»	. .	. .	1,42
»	. .	. .	0,65
»	. .	. .	0,305
Oro.	8,8668	869 $^4/_5$	24,416
»	3,832	994 $^7/_{10}$	12,110
»	3,856	838 $^1/_2$	12,75
Argento. . . .	19,119	833 $^1/_3$	4,25
»	. .	902	5,10
»	. .	. .	2,55
»	. .	. .	0,425
Oro.	8,668	900	26,60
»	5,469	917	17,07
»	1,733	900	5,32
Argento. . . .	26,898	900	5,32
»	13,449	900	2,66
»	7,450	900	1,596
»	4,740	900	1,064
»	2,095	900	0,532
»	0,945	900	0,266
Rame. . . .	. .	. .	0,269
»	. .	. .	0,107
»	. .	. .	0,537

Tavola II.

MISURE LINEARI E ITINERARIE.

		Metri
Acqui.	Trabucco di 6 piedi di 12 once ciascuno. . . .	3,006000
Alessandria. . .	Braccio da tela	0,666000
»	Braccio pei drappi . . .	0,530000
»	Piede	0,438000
Ancona. . . .	Braccio	0,664000
Aosta.	Auna	1,872000
Bergamo. . . .	Braccio = 12 once . . .	0,659319
»	Piede = 12 once	0,437767
Bologna. . . .	Braccio di 12 once . . .	0,640039
»	Piede da legname . . .	0,380098
Bolzano. . . .	Braccio	0,778000
Brescia. . . .	Braccio da panno da 12 once	0,674124
»	Braccio da seta e tela . .	0,640383
Cagliari.	Trabucco o canna di 12 palme e ciascuno di 4 quarte	3,148200
Carrara. . . .	Braccio	0,619725
»	Palmo pei marmi = 12 once	0,249267
Castelnuovo. .	Braccio	0,595000
Cesena. . . .	Braccio per le tele . . .	0,702000
»	Braccio per seta e lana. .	0,620000
Como. . . .	Braccio	0,595000
Crema. . . .	Braccio = 12 once . . .	0,670164
»	Piede da legname. . . .	0,469786
Cremona. . . .	Braccio	0,595000
Faenza. . . .	Braccio da panno e seta .	0,638000
»	Braccio da tela nostrale .	0,720000

Segue la Tavola II.

		Metri
Ferrara. . . .	Braccio da panno e tela .	0,673607
»	Braccio da seta	0,634358
»	Piede di 12 once	0,403854
Forlì.	Braccio da panno e tela .	0,621963
Genova. . . .	Miglio.	1488,000
»	Palmo di 12 once . . .	0,249100
»	Canna per tela di 10 palmi.	2,491000
»	Canna grossa di 12 palmi.	2,988000
Guastalla. . .	Braccio	0,671000
Imola. . . .	Braccio = 12 once . . .	0,639350
»	Piede di parti 10 . . .	0,439661
Lodi.	Braccio	0,595000
»	Piede.	0,455000
Lucca.	Braccio per i panni . . .	0,605000
»	Braccio per la seta . . .	0,593000
Mantova. . . .	Braccio	0,637973
»	Piede.	0,466860
Massa di Carrara	Braccio	0,592871
Milano. . . .	Miglio lombardo	1785,000
»	Braccio di 12 once . . .	0,594936
»	Piede.	0,435186
»	Trabucco di 6 piedi. . .	2,611110
Mirandola. . .	Braccio da stoffa	0,638490
»	Braccio da legname . . .	0,531931
Modena. . . .	Braccio	0,633153
»	Miglio	1569,000
»	Braccio da costruttori . .	0,523048
Napoli. . . .	Palmo o Piede di 12 once.	0,262670
»	Palmo dopo il 1840 — misura decimale . . .	0,264550
»	Canna di palmi 8 . . .	2,096000
»	Miglio da 75 al grado . .	2226,000

Segue la Tavola II.

		Metri
Napoli . . .	Miglio da 7000 palmi . .	1851,852
Nizza marittima.	Auna	1,188400
Nizza Monferr.	Trabucco di 6 piedi . . .	2,916692
Novara. . . .	Braccio da panno . . .	0,669000
»	Braccio da seta	0,524000
»	Braccio da cotone . . .	0,593000
Oneglia. . . .	Canna di 12 palmi di 12 once ciascuno . . .	2,988000
Padova. . . .	Braccio da panno . . .	0,681000
»	Braccio da seta	0,638000
»	Piede	0,357000
Palermo e Sicilia	Miglio = 5760 palmi . .	1486,643
»	Palmo	0,258000
Parma. . . .	Braccio da panno e tela .	0,639500
»	Braccio da seta	0,587750
Pavia. . . .	Miglio	1480,000
»	Braccio = 16 once . . .	0,629272
»	Piede	0,471954
Pesaro. . . .	Braccio	0,631000
»	Piede.	0,348000
Piacenza. . .	Braccio	0,675000
»	Piede	0,470000
Pontremoli. . .	Braccio da panno . . .	0,692000
»	Braccio da muratore . .	0,551000
Ravenna. . .	Braccio	0,643138
»	Piede di 10 parti. . . .	0,585000
Reggio-Emilia. .	Braccio di 12 once mercantile	0,641072
»	Braccio da legname . . .	0,530898
Rimini. . . .	Braccio = 12 once . . .	0,631432
»	Piede = 10 once	0,584608
Roma. . . .	Palmo per le stoffe . . .	0,249000

Segue la Tavola II.

		Metri
Roma	Canna di palmi 8. . . .	1,992000
»	Miglio.	1489,480
»	Braccio per le tele . . .	0,635000
»	Palmo da costruttori = 12 once di 5 minuti. . .	0,223422
»	Canna di 10 palmi . . .	2,230000
»	Piede moderno	0,297896
Roveredo. . .	Braccio da panno . . .	0,699000
»	Braccio da seta	0,643000
»	Piede	0,316000
Rovigo. . . .	Braccio da panno, si divide in 12 once	0,669820
»	Braccio da seta	0,632809
Sardegna. . .	Auna o Raso	0,594000
Sarzana. . .	Braccio di palmi 3 . . .	0,747000
Savona. . . .	Cannella = 12 palmi di 12 once ciascuno . . .	3,000000
Sicilia. . . .	Palmo da panno	0,241000
»	Canna di 8 palmi . . .	1,928000
»	Miglio	1858,000
Sinigaglia. . .	Braccio da panno e da seta	0,664000
»	Piede	0,559000
»	Braccio per tele del paese	0,782000
Torino. . . .	Miglio	2469,136
»	Auna o Raso per le stoffe di 14 once	0,599394
»	Piede liprando di 12 once	0,514403
»	Trabucco di 6 piedi: piede = 12 once, oncia = 12 punti; punto = 12 atomi	3,086420
»	Piedi di 8 once	0,342935
»	Tesa di 40 once	1,714678

Segue la Tavola II.

		Metri
Trento	Braccio da panno	0,702000
»	Braccio da seta	0,631000
»	Passo di piedi 5	1,660000
Treviso	Piede	0,408000
Trieste	Braccio da panno	0,676000
»	Braccio da seta	0,641000
Udine	Braccio da panno	0,681000
»	Braccio da seta	0,636000
»	Piede	0,340000
Urbino	Braccio da panno	0,652000
»	Braccio da seta	0,596000
»	Braccio per tela del paese	0,702000
»	Piede	0,410000
Venezia	Miglio	1933,000
»	Braccio da lana	0,679000
»	Braccio da seta	0,639000
»	Piede di 12 parti	0,347735
»	Pertica di piedi 4 1/2	1,566000
Verona	Braccio da lana	0,648991
»	Braccio da seta	0,642449
»	Piede	0,342915
Vicenza	Braccio da panno	0,690000
»	Braccio da seta	0,638000
»	Piede	0,357000
Vigevano	Braccio da panno	0,668099
»	Braccio da seta	0,528144
»	Braccio da legname	0,599068
»	Piede	0,462381
Voghera	Braccio lungo	0,669000
»	Braccio corto	0,595000
»	Braccio da seta	0,529000

Tavola III.

MISURE DI CAPACITÀ.

		Ettolitri
Acqui.	Sacco di 8 staia, 16 coppi.	1,293064
Alessandria.	Salma di 12 staia, 16 coppi.	2,132586
»	Brenta di 64 boccali	0,620000
»	Brenta di 34 pinte	0,578394
Ancona.	Rubbio di 8 coppe	2,810000
»	Soma di 48 boccali	0,700000
Aquila.	Barile di 60 caraffe (vino).	0,385730
Bergamo.	Soma di 8 staia	1,712812
»	Brenta di 108 boccali	0,706905
Bologna.	Corba di 2 staia, di 8 quartiroli l'una	0,786448
»	Corba di 60 boccali	0,785931
Bolzano.	Moggio	0,610000
»	Emero di 40 mosse	0,570000
Brescia.	Soma di 12 quarte, di 4 coppi l'una	1,459200
»	Zerla di 72 boccali	0,497427
Cagliari.	Starello di 16 imbuti	0,505000
»	Botte: 10 quartare, di 8 mezze mezzette l'una (vino)	0,448400
»	Barile: 8 quartare, 24 misure l'una (olio)	0,336352
Carpi.	Quartaro di 96 boccali	1,230000
Carrara.	Sacco: 3 secchie, 8 quarrette	0,725476
»	Barile di 32 boccali	0,429986
Casale.	Sacco: 8 staia, di 16 coppi l'uno	1,293064
»	Brenta: 45 pinte di 2 boccali l'una	0,732105

Segue la Tavola III.

		Ettolitri
Castelnuovo. .	Sacco di 4 mine	0,300000
»	Barile di 36 boccali . .	0,390000
Catanzaro. . .	Salma di 120 caraffe (vino).	1,071470
Cento. . . .	Corba di 2 staia	0,770000
»	Corba di 48 boccali . .	0,910000
Cesena. . . .	Sacco: 4 quartarole, di 5 bernarde l'una . . .	1,381773
»	Soma di 54 boccali . .	0,639272
Chieti. . . .	Come ad Aquila	
Chiavenna. . .	Staio di 4 quartari . . .	0,180000
Como. . . .	Moggio di 8 staia . . .	1,510000
»	Brenta di 96 boccali . .	0,900000
Cosenza. . . .	Barile di 22 cannate (vino).	0,282870
Crema. . . .	Soma di 16 staia . . .	1,754811
»	Brenta di 64 boccali . .	0,485346
Cremona. . .	Sacco di 3 staia	1,070000
»	Brenta di 75 boccali . .	1,470000
Faenza. . . .	Corba di 8 ottave . . .	0,700000
»	Soma di 60 boccali . . .	0,730000
Ferrara. . . .	Moggio di 20 staia: staio = 4 quarte	6.218584
»	Mastello di 40 boccali . .	0,567842
Foggia. . . .	Barile di 40 caraffe (vino).	0,300010
Forlì.	Staio: 16 provende, di 2 mezzine l'una . . .	0,721622
»	Soma di 42 boccali	0,711277
Genova. . . .	Mina di 4 staia: staio = 24 gombette	1,165318
»	Mezzaruola: 3 terzaruoli, di 60 amole l'uno (vino)	1,590000
»	Quartarone di 6 misurette (olio)	0,005116

Segue la Tavola III.

		Ettolitri.
Guastalla. . .	Sacco di 3 staia	1,150000
»	Brenta di 72 boccali . .	0,790000
Imola.	Corba di 2 staia	0,688686
»	Corba di 60 boccali . .	0,746758
Lodi.	Sacco di 8 staia	1,589566
»	Brenta di 80 boccali .	0,662030
Lucca. . . .	Sacco di 3 staia	0,730000
»	Staio	0,245000
»	Barile di 30 boccali . .	0,350000
Mantova. . .	Sacco: 3 staia, di 4 quarti l'uno	1,038155
»	Soglio di 60 boccali . .	0,546818
Massa ducale. .	Sacco di 3 staia	0,755079
»	Barile di 32 boccali . .	0,436180
Milano. . . .	Moggio di 8 staia . . .	1,462343
»	Brenta di 96 boccali . .	0,755544
Mirandola. . .	Quartaro di 60 boccali .	1,038509
Modena. . . .	Sacco: 2 staia, di 8 quarte l'uno	1,265004
»	Quartaro: 90 boccali . .	1,018117
Napoli. . . .	Prima del 1840. Tomolo: 24 misure	0,553189
»	Barile: 60 caraffe . . .	0,436738
»	Dopo il 1840. Tomolo (aridi), vale 3 palmi cubi e le divisioni sono in decimali; ma nella vendita al minuto dividesi in 2 mezzette, o in 4 quarti, o in 24 misure . . .	0,555451
»	Barile: vale un cilindro di un palmo di diametro e	

Segue la Tavola III.

		Ettolitri
	3 di altezza; dividesi in decimali, ma in commercio si usa dividerlo in 60 caraffe	0,436250
Napoli . . .	12 barili = botte	
Nizza Marittima.	Carica: 4 staia, di 2 emine l'una	1,617500
»	Carica o salmata: 120 pinte	0,943500
Novara. . . .	Sacco: 8 emine, di 16 coppi l'una	1,264729
»	Brenta: 72 boccali . . .	0,546797
Oneglia. . . .	Mina: 3 staia, di 2 minette l'una	1,200000
»	Per le olive: gombata di 3 staia	1,980000
»	Salmata: 2 barili, di 48 pinte l'uno	0,960000
Ossola. . . .	Staio: 2 emine, di 4 quarte l'una	0,324962
»	Brenta: 48 boccali . . .	0,539912
Padova. . . .	Moggio: 12 staia . . .	3,480000
»	Mastello di 72 bozze . .	0,710000
Palermo. . .	Dopo 1840 come Napoli	
Parma. . . .	Staio: 2 mine, di 8 quartarole l'una	0,470400
»	Staio per la calce . . .	0,489400
»	Staio pel carbone . . .	0,488800
»	Brenta: 36 pinte, di 2 boccali l'una	0,716720
Pavia. . . .	Sacco: 6 emine, di 2 quartari l'una	1,222633

Tavola IX.

PARTI DEL CIRCOLO.

—

	gradi	minuti primi	minuti secondi	Divisione decimale
La Circonferenza si divide in . . .	360	21600	1296000	gr. c. 400
Il Grado	—	60	3600	gr. c. 1,111
Il Minuto . . .	—	—	60	m. c. 1,851851
Il Secondo . . .	—	—	1	s. c. 3,086

Tavola X.

Lire, soldi e denari ridotti a rotti decimali di scudo.

Lire	1	= 0,142857	Soldi	13	= 0,092857
	2	285714		14	100000
	3	428571		15	107143
	4	571429		16	114286
	5	714286		17	121429
	6	857143		18	128571
Soldi	1	007143		19	135714
	2	014286	Denari	1	000595
	3	021429		2	001190
	4	028571		3	001786
	5	035714		4	002381
	6	042857		5	002976
	7	050000		6	003571
	8	057143		7	004167
	9	064286		8	004762
	10	071429		9	005357
	11	078571		10	005952
	12	085714		11	006548

Segue la Tavola III.

		Ettolitri
Pavia	Brenta: 96 boccali . . .	0,714427
Pesaro. . . .	Staio di 6 coppe	1,700000
Piacenza. . .	Staio: 2 mine, di 8 coppelli l'una	0,348200
»	Veggiola: 10 brente, di 48 pinte l'una	7,577117
»	Brenta di 96 boccali . .	0,760000
Pontremoli. . .	Quartaro: 12 quarrette .	0,220200
»	Barile: 36 boccali . . .	0,324000
»	Quarterone (olio) . . .	0,004900
Potenza. . . .	Barile: 40 pinte (vino) .	0,357180
Ravenna. . . .	Rubbio: 5 staia . . .	2,875454
»	Barile: 40 boccali . . .	0,537713
Reggio(Calabria).	Salma: 100 quart. (vino)	1,071470
Reggio (Emilia).	Sacco: 2 staia	1,194911
»	Brenta: 60 boccali . . .	0,758981
Rimini. . . .	Staio: 4 quarti, di 3 bernarde l'una	1,876332
»	Soma: 64 boccali . . .	0,761320
Roma.	Rubbio: 4 quarte . . .	2,144651
»	22 scorzi = rubbio; scorzo = 4 quartucci	
»	Botte: 16 barili	9,334655
»	Barile di 32 boccali . .	0,580000
»	Barile per olio di 28 boccali	0,570000
Roveredo. . .	Soma di 10 staia . . .	1,520000
»	Emero	0,570000
Rovigo. . . .	Sacco: 3 staia, di 4 quarte l'uno	0,994393
»	Mastello: 108 bozze . .	1,047902
Salerno. . . .	Barili di 60 caraffe (vino).	0,419660

Segue la Tavola III.

		Ettolitri
Salò.	Zerla di 72 boccali. . .	0,440000
Sardegna. . .	Starello.	0,490000
Sarzana. . . .	Mina di 3 secchie. . . .	1,230000
»	Barile di 20 fiaschi e 60 mezzette	0,430000
Sassari. . . .	Rasiere: 7 starelli . . .	1,767500
»	Botte di 10 quartare (vino)	0,448400
»	Barile: 8 quartare, 24 misure l'una (olio) . .	0,336362
Savona. . . .	Mezzaruola di 4 barili (vino)	1,600000
»	Barile di 240 quarteroni (olio)	0,654800
Sicilia. . . .	Salma grossa di 16 tomoli.	3,410000
»	Salma generale di 16 tomoli	2,760000
»	Salma in Messina di 120 quartucci	0,870000
»	Cantaro di Palermo per olio	0,865000
Sinigaglia. . .	Rubbio di 8 coppe . . .	2,810000
»	Soma di 50 boccali. . .	1,180000
Sondrio. . . .	Soma: 8 quartari, di 4 emine l'uno	1,462343
»	Soma di 120 boccali . .	1,305610
Teramo. . . .	Barile di 60 caraffe (vino)	0,436250
Torino. . . .	Soma di 5 mine	1,140000
»	Brenta di 72 boccali . .	0,490000
»	Bubbio per l'olio . . .	0,250000
Tortona. . . .	Sacco: 6 emine o staia di 16 coppelli	1,320000
»	Brenta: 48 pinte, di 2 boccali	0,848623
Trento. . . .	Soma di 8 staia	1,690000
»	Orna di 48 boccali . . .	0,780000

Segue la Tavola III.

		Ettolitri
Trieste. . . .	Orna di 40 boccali . . .	0,570000
Udine. . . .	Staio di 6 pesinali . . .	0,730000
» .	Conzo di 64 boccali . .	0,790000
Urbino. . . .	Rubbio di 8 coppe . . .	2,810000
»	Soma di 50 boccali . . .	0,860000
Venezia. . . .	Maggio: 8 mezzeni, di 8 quartucci l'uno . . .	3,332688
»	Botte: 10 mastelli . . .	6,516900
»	Anfora = 8 mastelli . . .	6,009352
»	Staio di 4 quarti . . .	0,830000
»	Barile di 24 bozze . . .	0,640000
»	Miro per olio di 20 libbre	0,160000
Verona. . . .	Sacco: 8 minali, di 4 quarte	1,146535
»	Brenta di 72 inghistare .	0,705111
Vicenza. . . .	Sacco di 4 staia	1,080000
»	Mastello di 120 bozze . .	1,140000
Vigevano. . .	Sacco: 6 staia, di 4 quartari	1,144875
Voghera. . . .	Brenta di 96 boccali . .	0,700000

Tavola IV.

MISURE DI SUPERFICIE AGRARIA.

		Ari
Acqui.	Tavola = 4 trabucchi quadrati	0,361441
Alessandria.	Tavola: 12 piedi . . .	0,327498
»	Staio piccolo = 12 tavole; staio grande = 18 tavole; moggio = 8 staia.	
Aosta.	Séteur: 8 quartanées, di 100 tese quad. l'uno .	28,035072
Aquila. . . .	Coppa	6,179730
Avellino. . . .	Moggio	40,044650
Ancona. . . .	Soma in pianura	104,840000
»	Soma di mezza costa . .	117,420000
Bergamo. . . .	Pertica di 24 tavole . .	6,623082
Bologna. . . .	Tornatura di 144 tavole .	20,804358
Bolzano. . . .	Pertica	3,600000
Brescia. . . .	Piò di 100 tavole . . .	32,553938
Cagliari. . . .	Starello di 16 imbuti . .	39,867500
Campobasso.	Tomolo	23,366910
Carrara Duc.	Quartiere di 100 tavole .	12,390686
Casale. . . .	Moggio: 8 staia, di 12 tavole l'una	32,386366
Castelnuovo.	Biolca di 72 tavole . . .	28 360000
Catanzaro. . .	Tomolata	27,808780
Cesena. . . .	Tomatura di 100 tavole .	28,995272
Chieti.	Salma	97,308500
»	Tomolo	32,436110
Como.	Pertica	7,040000
Cosenza. . . .	Moggio	40,044650
Crema. . . .	Pertica di 24 tavole . .	7,627364
Cremona. . .	Pertica	8,080000

Segue la Tavola IV.

		Ari
Faenza. . . .	Tornatura	23,020000
Ferrara. . . .	Biolca di 400 pertiche .	65,239360
»	Staro di 66 pertiche e due terzi	10,873227
Foggia. . . .	Tomolo: 3 pezze, di 3 catene l'una	30,659300
»	Verzura = 4 tomoli; carro = 20 verzure.	
Forlì.	Tornatura di 100 tavole .	23,834505
Genova. . . .	Cannella quadrata: 12 palmi superficiali, di 12 once superficiali l'uno.	0,088625
Guastalla. . .	Biolca	30,530000
Imola.	Tornatura di 100 tavole .	19,330161
Lecce.	Tomolo	62,569760
Lodi.	Pertica	7,170000
Lucca. . . .	Coltre di 4 quartieri . .	40,080000
Mantova. . . .	Biolca di 100 tavole . .	31,385969
Massa Ducale. .	Staro di 49 tavole . . .	12,044110
Milano. . . .	Pertica di 24 tavole . .	6,545179
Mirandola . .	Biolca di 72 tavole . . .	29,336320
Modena. . . .	Biolca di 72 tavole . . .	28,364724
Napoli. . . .	Moggio di 90 tavole . .	33,230000
Nizza Marittima	Starata: 2 eminate di 8 moturali l'una	15,444900
Nizza Monferr.	Moggio: 8 staia, di 12 tavole l'una	32,667200
Novara. . . .	Moggio: 8 pertiche, di 24 tavole l'una, ogni tavola è 24 gettate . .	30,660300
Oneglia. . . .	Cannella quad. di 144 palmi quadrati	0,089281

Segue la Tavola IV.

		Ari
Ossola	Staro di 400 spazza . .	15,731100
Palermo. . . .	Moggio di 100 canne quadr.	6,998684
Padova. . . .	Campo	38,630000
Parma. . . .	Biolca: 6 staia, di 12 tavole l'una	30,814390
Pavia.	Pertica di 24 tavole . .	7,697918
Pesaro. . . .	Centinaio di canne quadr.	27,272727
Piacenza. . .	Pertica: 24 tavole, di 12 braccia l'una . . .	7,620186
Potenza. . . .	Tomolo	22,024560
Ravenna. . .	Tornatura di 100 tavole .	34,176615
Reggio (*Emilia*)	Biolca di 72 tavole . . .	29,222503
Reggio(*Calabria*).	Quattronata	12,113510
Rimini . . .	Tornatura di 100 tavole .	29,479293
Roma.	Rubbio: 4 quarte, di 4 scorzi l'una	184,843800
»	Per le vigne; Pezza: 4 quarte, di 40 ordini l'una.	26,406300
Roveredo. . .	Pertica come Bolzano . .	3,600000
Rovigo. . . .	Campo di 840 tavole . .	44,644077
Salerno. . . .	Moggio	36,777120
Sarzana. . . .	Giova di 120 canne quadr.	34,330000
Sassari. . . .	Rasiere: 7 starelli, di 8 imbuti l'una	139,536250
Savona. . . .	Cannella quadrata . . .	0,090000
Sicilia. . . .	Salma di 16 tomoli . . .	14,000000
Sinigaglia. . .	Soma	124,770000
Sondrio. . . .	Pertica di 24 tavole . .	6,880776
Teramo. . . .	Tomolata	40,044650
Torino. . . .	Giornata di 100 tavole .	38,103948
Trento. . . .	Staio di 180 pertiche . .	8,460000
Udine. . . .	Zuoia grande	52,170000

Segue la Tavola IV.

		Ari
Udine	Zuoia piccola	35,060000
Urbino. . . .	Cappa	26,090000
Venezia. . . .	Campo: 4 quarte, di 210 tavole l'una	36,566063
»	Migliaio di ghebbi . . .	24,490000
Verona. . . .	Campo di 720 tavole . .	30,479466
Vicenza. . . .	Campo	38,630000
Vigevano. . .	Pertica di 24 tavole . .	7,388894
Voghera. . . .	Pertica di Pavia	7,700000
»	Pertica di Milano . . .	6,550000

Tavola V.

PESI.

		Chilogrammi
Alessandria . .	Libbra di once 12 . . .	0,316000
»	Rubbio di libbre 25 . .	7,900000
Ancona. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,330000
Aosta.	Rubbo: 25 libbre, di 12 once l'una	9,615000
Bergamo. . .	Libbra di once 12 . . .	0,325000
»	Libbra di once 30 . . .	0,812822
Bologna. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,361851
Brescia. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,320812
Cagliari. . . .	Cantaro: 100 libbre, 12 once l'una	40,656310
Carrara. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,324997
Casale. . . .	Rubbo: 25 libbre, 12 once l'una	8,134500
Castelnuovo. .	Libbra di once 12 . . .	0,334000
Cesena. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,325474
Como.	Libbra di once 12 . . .	0,317000
Crema. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,325474
»	Libbra di once 30 . . .	0,813000
Cremona. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,309000
Faenza. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,362000
Ferrara. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,345137
Forlì.	Libbra di once 12 . . .	0,329444
Genova. . . .	Peso grosso. Cantaro .	47,649600
»	Peso piccolo. Rubbio: 25 libbre, 12 once l'una .	7,918750
»	Pesata (per le legna nel porto)=4 cantari grossi.	
»	Pesata per la provincia = 5 cantari grossi.	

Segue la Tavola V.

		Chilogrammi
Genova. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,317000
Guastalla. . .	Libbra di once 12 . . .	0,325000
Imola. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,362583
Lodi.	Libbra di once 12 . . .	0,321000
Lucca.	Libbra di once 12 . .	0,335000
Mantova. . .	Libbra di once 12 . . .	0,310529
Milano. . . .	Libbra di once 12 di 8 ottavi l'una	0,326793
»	Libbra di once 28 e 8 ottavi	0,762517
»	Marco: 8 once, 24 denari l'una	0,234997
»	Libbra di marco = 12 once di marco	0,352495
Modena. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,340457
Napoli. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,321000
»	Cantaro picc. di libb. 150	48,150000
»	Cantaro gros. di rotoli 100	89,100000
»	Rotolo di libb. 2 e onc. 9 $^1/_2$	0,891000
Nizza Marittima	Quintale: 6 rubbi, di 25 libbre l'uno	46,744300
Nizza di Pr. .	Libbra di once 12 . . .	0,311000
Novara. . . .	Libbra grossa: 28 once, di 24 denari l'una . .	0,759439
»	Libbra piccola: 12 once .	0,325474
Oneglia. . . .	Cantaro: 6 rubbi . . .	47,184000
Padova. . . .	Libbra grossa di once 12	0,487000
»	Libbra sottile di once 12	0,339000
Palermo e Sicilia	Vecchie misure. Rotolo .	0,793420
»	Libbra	0,317368
»	Dopo il 1840, come Napoli.	

Segue la Tavola V.

		Chilogrammi
Parma. . . .	Peso: 25 libbre, 12 once, l'una	8,200000
»	Libbra di once 12 . . .	0,328000
Pavia. . . .	Libbra grossa: 28 once, 24 denari l'una . . .	0,743692
»	Libbra piccola: 12 once .	0,318725
Pesaro. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,330000
Piacenza. . .	Peso o rubbo: 25 libb., 12 once l'una	7,937933
»	Libbra di once 12 . . .	0,318000
Pontremoli. . .	Peso: 25 libbre, di 12 once l'una	8,333350
Ravenna. . .	Libbra di once 12 . . .	0,348000
Reggio (Emilia).	Libbra di once 12 . . .	0,324524
Rimini. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,345516
Roma.	Libbra di once 12 . . .	0,339000
»	Cantaro di libbre 100 . .	33,900000
Roveredo. . .	Libbra di once 12 . . .	0,322000
Rovigo. . . .	Libbra sottile di once 12 .	0,301416
»	Libbra grossa di once 12 .	0,477294
Sarzana. . .	Libbra di once 12 . . .	0,330000
Sassari. . . .	Come Cagliari.	
Savona. . . .	Peso piccolo di Genova = 6 rubbi.	
Sinigaglia. . .	Libbra di once 12 . . .	0,337000
Sondrio. . . .	Libbra: 30 once	0,797882
Torino. . . .	Avanti il 1818 Rubb.: 25 libb.	9,221113
»	Idem, dopo il 1818 . . .	9,221995
»	Marco: 8 once, 24 den., l'una, (avanti 1818) .	0,245896
»	Idem, dopo il 1818 . .	0,245920

Segue la Tavola V.

		Chilogrammi
Torino. . . .	Carato di 4 grani (materie preziose) prima del 1818 valeva gram. 0,213451, dopo 0,213472 . . .	
»	Libbra di once 12 . . .	0,369000
Tortona. . . .	Rubbio: 25 libb., 12 once l'una	8,141250
Trento. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,336000
Trieste. . . .	Libbra di once 12 . : .	0,560000
Udine. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,301000
Urbino. . . .	Libbra di once 12 . . .	0,323000
Venezia. . . .	Libbra grossa: 12 once, di 8 dramme l'una . .	0,476998
»	Libbra sottile: 12 once .	0,301230
Verona. . . .	Libbra grossa: 18 once .	0,499762
»	Libbra sottile: 12 once .	0,333176
Vicenza. . . .	Libbra sottile di 12 once .	0,339000
»	Libbra grossa di 12 once .	0,487000
Voghera. . . .	Libbra sottile di 12 once .	0,319000
»	Libbra grossa di 28 once .	0,745000

PARTE SECONDA.

POTENZE E RADICI.

Nozioni generali.

141. Abbiamo già detto (§ 24) che quando si moltiplicano due o più numeri differenti fra loro, ciò che risulta dall'operazione si chiama in generale *prodotto*. Ma se i numeri o fattori son tutti eguali, ossia se un dato numero si moltiplichi una o più volte in sè stesso, il prodotto prende allora il nome particolare di *potenza*, mentre i fattori prendono quello di *radice*; onde *potenza è il prodotto di un numero moltiplicato una o più volte in sè stesso; e radice è il fattore, o numero, che moltiplicato una o più volte in sè stesso produce la potenza.*

142. Se il numero non è moltiplicato in sè stesso che una sola volta, il prodotto si chiama allora potenza *seconda* o del *secondo grado*, comecchè risultante da due fattori eguali. Per simil ragione si chiama potenza *terza, quarta, quinta* ec. o del *terzo, quarto, quinto grado* ec. il prodotto di un numero moltiplicato 2, 3, 4 volte in sè stesso, o risultante da 3, da 4 o da 5 fattori eguali. Il grado della potenza è dunque superiore di un'unità al numero delle moltiplicazioni occorse per effettuarla, e corrisponde precisamente al numero dei fattori eguali, che a quell'oggetto si son dovuti moltiplicar fra di loro.

143. All'opposto si chiama *radice seconda, terza, quarta* ec. il numero che moltiplicato una, due o tre volte in

cazione. Con l'espressione poi di potenza *zero* s'intende escluso anche il numero qualunque, e vuolsi solo rappresentare la semplice unità, del che vedremo più abbasso la ragione.

2.° Le potenze seconda e terza si conoscono anche col nome, quella di *quadrato,* questa di *cubo;* come egualmente si chiama radice quadra o quadrata la radice seconda, e cubica o cuba la terza. Anzi la radice quadra suol chiamarsi anche semplicemente *radice.*

147. Infine come vi ha un metodo per accennare un prodotto, che vuol farsi fra più fattori, e questo, come abbiamo già detto, consiste nel segnare uno dietro l'altro i fattori con in mezzo a loro il segno $\times$, così vi è egualmente un altro metodo, e di grandissima comodità, per accennare o la potenza a cui una data radice vuole inalzarsi, o la radice che vuole estrarsi da una data potenza.

Nel caso d'inalzamento a potenza si scrive una sola volta la radice data; e al di sopra di essa un poco sulla destra si segna in cifra il numero delle volte, che la radice deve essere moltiplicata in sè stessa, onde dalla moltiplicazione risulti la richiesta potenza. Così per esprimere il 5 da elevarsi alla quarta potenza si scrive 5^4, e si pronunzia 5 *alla quarta,* e per dimostrare che il 5 elevato alla quarta potenza rende 625, si scrive $5^4=625$. Così 3^3, 7^2 si leggono 3 *alla terza* o a *cubo*, 7 *alla seconda* o a *quadrato;* e l'eguaglianza $3^3=27$, $7^2=49$, esprimono che il 3 elevato alla terza potenza fa 27, e il 7 elevato alla seconda fa 49. Il numero posto al disopra della radice si chiama *esponente,* ed è manifesto che equivale al grado della potenza, o al numero dei fattori eguali da impiegarsi per conseguirla.

Nel caso poi di doversi accennare una radice da estrarsi da una potenza data, si fa precedere alla potenza il segno di convenzione $\sqrt{}$, chiamato *radicale,* in seno a cui si scrive in cifra il grado della radice voluta: così per denotare che deve estrarsi da 81 la radice 4.ª si scrive $\sqrt[4]{81}$,

e si legge *radice quarta* di 81; e per mostrare che questa radice è 3, si scrive $\sqrt[4]{81}=3$.

La cifra o indice apposto in seno al radicale può chiamarsi *esponente radicale*, o della radice. Si usa di non segnarla, allorchè si tratta della radice quadra o seconda; così per rappresentare la radice quadra di 9, si scrive $\sqrt{9}$ e non $\sqrt[2]{9}$. Che se la potenza data non è espressa col suo valore assoluto, ma col mezzo di esponenti, come per esempio se debba estrarsi la radice sesta da 3^5, si scriverà come sopra $\sqrt[6]{3^5}$ e si pronunzierà *radice sesta di 3 alla quinta;* oppure si scriverà ancora $3^{\frac{5}{6}}$ cioè omettendo il segno radicale, e ponendo al di sotto dell'esponente in forma di denominatore il grado della radice. Si avverta infine che per chiarezza maggiore e per agevolare quanto più potremo la maniera di esprimerci, chiameremo *esponenziali* le potenze e le radici, quando sono espresse semplicemente per mezzo dei loro esponenti, *numeriche* quando sono espresse per il loro valore assoluto.

CALCOLO DELLE POTENZE NUMERICHE ED ESTRAZIONE DELLE LORO RADICI.

148. Niuna difficoltà ammette la formazione di una potenza, allorchè ne è data numericamente e non per esponente la radice, e se ne cerca il valore assoluto numerico. È troppo chiaro che basta in tal caso applicare le semplici regole della moltiplicazione. Così per aver la quarta potenza del 15, basterà moltiplicare il 15 quattro volte per sè medesimo o eseguire il prodotto $15\times15\times15\times15$. Dalla prima moltiplicazione, cioè da 15×15, si avrà 225; da questo prodotto moltiplicato per 15 si avrà 3375; e finalmente da questo moltiplicato novamente per 15 si otterrà 50625, valore richiesto.

149. Nel caso però di potenze molto elevate non saranno inutili le seguenti avvertenze:

1.ª Che la potenza quarta si ha indipendentemente dalla terza moltiplicando la seconda per sè medesima, ossia facendo il quadrato della seconda.

2.ª Che similmente la quinta potrà aversi moltiplicando la seconda per la terza.

3.ª Che la sesta si otterrà dal quadrato della terza, e ancora moltiplicando la quarta per la seconda.

4.ª In generale ogni potenza, il cui grado o esponente sia decomponibile in fattori, potrà aversi dal prodotto di quelle più basse potenze, il cui grado equivalga a quello dei fattori componenti.[1]

150. Può anche notarsi di più:

1.º Che i quadrati dei numeri semplici non vengon composti che di una o due cifre; ed eccone intanto la serie, che tornerà bene apprendere a memoria.

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrati	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

2.º Che tutte le potenze pari di qualunque grado non posson terminare altrimenti che in 0, 1, 4, 5, 6, 9.[2]

[1] È infatti evidente che, per esempio, la quarta potenza del 6 essendo eguale 6×6×6×6 può decomporsi in due fattori eguali, espressi da 6×6, cioè dal quadrato o seconda potenza del 6. Così la quinta potenza equivalendo a 6×6×6×6×6 può decomporsi nel fattore 6×6=36 e nell'altro 6×6×6=216, e sarà perciò eguale a 36×216; e l'istesso si dica delle potenze rimanenti.

[2] Ciò è visibile nel quadrato, che essendo il prodotto di una radice in sè stessa, l'ultima sua cifra dovrà risultare dal prodotto dell'ultima cifra della radice in sè medesima, nè potrà aver altra desinenza che quella, la quale compete al quadrato di quest'ultima cifra. Dunque dovrà terminare in uno dei modi nei quali posson terminare i quadrati dei numeri semplici, cioè in 0, 1, 4, 5, 6, 9. Siccome poi tutte le potenze pari si posson riguardare come quadrati in forza di ciò che è stato detto sotto il § 149, così anche a tutte queste si estende la necessità della medesima desinenza.

3.° Che le potenze quarta, ottava, sedicesima ec., hanno limiti ancor più ristretti non potendo finire che in 0, 1, 5, 6.[1]

151. Assai più difficoltosa dell'innalzamento a potenza si è l'operazione inversa ossia l'*estrazione delle radici*. Le comuni regole aritmetiche si mostrano già complicate fino dall'estrazione di quelle di secondo grado. Sono ancor più complicate nel caso della radice cuba. Quanto poi ai gradi superiori, se non vi sia modo di risolverli nel secondo, nel terzo, e nei loro composti, la comune aritmetica non assegna regola alcuna. Fortunatamente, come vedremo, i *logaritmi* tolgono affatto questa difficoltà, e riducono il calcolo radicale a semplicissime operazioni. Intanto ci occuperemo dell'estrazione della radice di secondo grado, la quale ci proponiamo d'insegnare sopra un esempio.

Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 40297104.

	6348
6	40,29,71,04
123	4 29
1264	60 71
12688	101504

Comincio dal separare il numero dato in classi di due cifre da destra verso la sinistra, lasciando una sola cifra per ultima classe a sinistra, quando il numero delle cifre si trovi esser caffo. Quindi fra i quadrati dei numeri semplici scelgo quello, che è immediatamente inferiore alla suddetta prima classe a sinistra, cioè per noi al 40. Questo quadrato è evidentemente il 36, che ha per radice il 6: dal che intanto concludo che la prima cifra della radice cercata

[1] La potenza quarta è il quadrato della seconda, ma la seconda non può terminare, come abbiamo detto, che in 0, 1, 4, 5, 6, 9: dunque il suo quadrato o la quarta potenza non potrà avere altre desinenze, che quelle dei quadrati di queste cifre, cioè in 0, 1, 5, 6. L'istesso raziocinio vale per la potenza ottava, sedicesima ec.

sarà 6. La segno in due luoghi, uno al di sopra del numero proposto, a guisa di quoziente, l'altro di fianco in forma di divisore; e quindi operando appunto come nella divisione, moltiplico l'uno per l'altro questi due 6, ne sottraggo a mente il prodotto 36 dalla classe 40, e segno al di sotto il resto ottenuto 4.

Accanto a questo resto abbasso tutta intera la seguente classe 29, e formo così un 429. Quindi raddoppio la cifra 6 già segnata in radice, ed ho 12 che segno al di sotto di quell'altro 6, che nell'operazione precedente ha figurato da divisore. Dopo di che comincio a dividere per questo 12 il 429; e appena rilevata la prima cifra del quoziente, che sarebbe manifestamente 3, la segno in radice accanto al 6 e la segno parimente accanto al divisore 12 che si cangia allora in 123; e quindi ripresa la divisione del 429 non più per 12 ma per 123, e operando secondo le solite regole della *danda*, cioè moltiplicando per il quoziente 3 il nuovo divisore 123, sottraendo a mente dal 429 il prodotto 369, ho di resto 60 che segno al solito.

Accanto a questo resto abbassata l'intera terza classe 71 formo il nuovo dividendo 6071, e di poi raddoppio tutto intero il 63 porzione di radice già ottenuta, ed ho 126, che segno sotto al precedente divisore 123. Come sopra prendo a dividere per esso 126 il 6071; con che immediatamente otterrei il numero 4 per prima cifra del nuovo quoziente: lo segno in radice a destra delle altre due, e lo segno parimente alla destra del divisore 126 che diviene allora 1264. Riprendendo allora la divisione come sopra per 1264, giungo secondo il solito al resto 1015.

Ripeto quindi di nuovo le stesse operazioni che sopra, cioè abbasso l'ultima classe 04: raddoppio il 634 porzione già ottenuta della radice, ed ho 1268; divido per 1268 il 101504, segno il quoziente 8 in radice, e a destra del divisore 1268; effettuo la nuova divisione per 12688, e come non trovo alcun resto, così concludo che la radice cercata è 6348. Se ne può aver la prova moltiplicando 6348

una volta in sè stesso, il che dà appunto il quadrato 40297104.[1]

[1] *Dimostrazione della regola dell' estrazione della radice quadra.* Prima d' inoltrarci alla dimostrazione di questa regola premetteremo alcuni principj di pienissima evidenza.

1.° I quadrati dei numeri semplici sono di due cifre, eccettuati quelli dell'1, del 2 e del 3, i quali non ne hanno che una. Ciò si è già accennato, e si rende manifesto dalla sola ispezione della tavoletta riportata al § 150.

2.° Le diecine, le centinaia, le migliaia, in generale tutti i numeri rappresentati da una cifra semplice con un séguito qualunque di zeri han per quadrato il quadrato delle cifra semplice, con un doppio numero di zeri. Così il quadrato di 30 è 900; quello di 800 è 640000, quello di 9000 è 81000000. Tutto questo è evidente e risulta dai principj della moltiplicazione.

3.° Quindi se la cifra semplice è una delle tre prime, il numero totale delle cifre componenti questi quadrati sarà impari; negli altri casi sarà sempre pari, ed eguaglierà il doppio delle cifre della radice.

4.° Laonde divisi questi quadrati in classi di due in due cifre, cominciando da destra e andando verso la sinistra, e considerando come classe la prima a sinistra, anche nel caso che resti di una cifra sola, il numero di queste classi equivarrà al numero delle cifre che sono in radice, e la prima a sinistra sarà sempre il quadrato della prima cifra della radice.

5.° Perciò la radice di questi quadrati si avrà prendendo quella della prima classe, e facendola seguire da tanti zeri quante sono le classi seguenti. Così il quadrato 36000000, che si riduce in quattro classi binarie, conterrà quattro cifre in radice, e come la prima classe 36 è il quadrato di 6, la radice totale ne sarà dunque 6000.

6.° Il quadrato degli altri numeri comunque composti d'unità, diecine e centinaia ec., potranno come i precedenti dividersi in tante classi binarie, quante sono le cifre della radice. Ciò pure è ben chiaro. Infatti sia per esempio 6348 la radice. Siccome tanto il quadrato di 6000, che l' altro di 7000 son composti di quattro classi (osserv. 4) è necessario che debba esserlo ancora quello della data radice, che è intermedia fra queste due, la quale perciò conterrà del pari che i quadrati dell' una e dell' altra nè più nè meno di quattro classi binarie.

7.° La prima classe però non sempre equivarrà come sopra al quadrato della prima cifra della radice, ma neppure potrà essere più piccola, come neppure potrà giungere al quadrato immediatamente superiore, cioè a quello della cifra, che supera di un' unità la prima cifra della radice Così il primo membro del quadrato di 6348, sarà un nu-

152. Si avverta 1.° che qualora dopo aver notato in radice alcuno dei quozienti ottenuti con le operazioni precedenti,

mero compreso fra il 36 quadrato del 6 e il 49 quadrato del 7. Il che è ben manifesto: poichè se, come abbiamo veduto, (osserv. 5) il primo membro del quadrato di 6000 è 36; e del quadrato di 7000 è 49, è chiaro che quello di 6348, radice compresa fra il 6000 e il 7000, nè dovrà esser minore di 36, nè potrà giungere a 49.

8.° Perciò qualunque siasi il quadrato, se col metodo sopra espresso (osserv. 4) si divida in classi di due in due cifre, la radice della prima classe a sinistra, qualora questa classe sia un quadrato perfetto, oppure quella del quadrato prossimamente inferiore, sarà altresì la prima cifra della radice totale.

9.° Infine se data una radice qualunque, si supponga ridotta alla sua naturale espressione, cioè sciolta nelle sue classi di unità, diecine, centinaia ec., dico che il suo total quadrato si troverà risultare dei seguenti termini:

1.° Quadrato della classe maggiore, cioè della prima a sinistra,
2.° doppio prodotto della prima classe nella seconda,
3.° quadrato della seconda,
4.° doppio prodotto della prima e seconda nella terza,
5.° quadrato della terza,
6.° doppio prodotto della prima, seconda e terza nella quarta,
7.° Quadrato della quarta; e così di seguito.

Si abbia infatti per esempio la radice 6348, che sciolta nelle sue classi corrisponde a $6000+300+40+8$; se sotto questa forma se ne faccia il quadrato, cioè si moltiplichi per $6000+300+40+8$, cominciando a moltiplicare prima per 6000, poi per 300, poi per 40, finalmente per 8, troveremo appunto:

1.° Il prodotto di 6000 in 6000, cioè il quadrato di 6000.	36000000
2.° Due volte il prodotto di 6000 in 300, eguale in tutto a $2\times6000\times300=12000\times300$.	3600000
3.° Una volta il prodotto di 300 in 300, quadrato di 300.	90000
4.° Due volte il prodotto di 6000, e di 300 in 40, in tutto$=2\times6300\times40=12600\times40$.	504000
5.° Una volta il prodotto di 40 in 40, quadrato di 40.	1600
6.° Due volte il prodotto di 6000, di 300 e di 40 in 8, in tutto $=2\times6340\times8=12680\times8$.	101440
7.° Infine una volta il prodotto di 8 in 8, quadrato di 8.	64
TOTALE.	40297104

Il qual numero corrisponde esattamente, come doveva, al prodotto di 6348 in 6348 ottenuto con le regole ordinarie della moltiplicazione.

e dopo aver segnato secondo la regola questo quoziente alla destra del divisore, si trovi che il suo prodotto per il

Tutto questo premesso, si abbia da estrarre la radice dello stesso quadrato 40297104, che è quello appunto del testo.

Le quattro classi binarie, in cui è decomponibile, mi avvertiranno in primo luogo che la radice sarà composta non più che di quattro cifre, cioè unità, diecine, centinaia e migliaia.

In secondo luogo il metodo suddetto (osserv. 8.a) farà scoprire la prima cifra o la cifra delle migliaia, che dovrà essere il 6, poichè 36 è il quadrato più prossimo inferiormente a 40.

Dunque il valore della prima parte della radice sarà 6000, il cui quadrato 36000000 formerà perciò il primo termine del quadrato totale segnato all'osservazione 9.a sotto il numero 1. Dunque sottraendo questo 36000000 dal quadrato totale, oppure, conforme prescrive la regola, la sola iniziale 36 dall'iniziale 40, il che torna l'istesso, il resto 4297104 conterrà gli altri sei termini del quadrato, di cui il maggiore è quello, che è rammentato sotto il numero 2, e che risultando dal doppio prodotto delle migliaia della radice nelle centinaia, deve necessariamente superare i rimanenti, che provengon da fattori sempre più piccoli.

Ora essendo questo secondo termine un prodotto di migliaia in centinaia, dovrà finire in 5 zeri; non avrà dunque influenza sulle ultime cinque cifre del resto totale, ma soltanto su quella porzione di esso, che è rappresentata da 4200000, di cui formerà quasi la parte totale. Di più il doppio prodotto delle migliaia nelle centinaia della radice, da cui questo secondo termine, come abbiamo veduto, risulta, equivale visibilmente al prodotto delle centinaia nel doppio delle migliaia, o anche meglio al prodotto delle unità delle centinaia nel doppio delle migliaia moltiplicato per 100. Se dunque si raddoppino le 6 migliaia già ottenute, e si riducano a 12000, e quindi si moltiplichi questo 12000 per 100 riducendolo a 1200000, e per questo numero si divida il 4200000, è chiaro che dovremo avere un quoziente per lo più eguale, o almeno ben poco maggiore dell'unità di centinaia della radice. Ma dividere 4200000 per 1200000 è lo stesso che dividere il 42, iniziale del resto totale 4297104 per 12, doppio della prima cifra della radice; è dunque chiaro che qualora a norma appunto della regola avuta la prima cifra 6 si raddoppi, e per il doppio avuto si divida con i consueti modi della *danda* la detta iniziale 42, il quoziente 3 che ne risulta o sarà eguale alla seconda cifra della radice, o di poco ne sarà superiore.

Sia per ora eguale: in tal caso la seconda classe della radice equivarrà dunque a 300, ed è chiaro che dopo ciò potremo subito avere, e quindi sottrarre dal resto precedente il secondo o terzo termine del quadrato totale (osserv. 9.) o tutta insieme la loro somma, la quale manife-

nuovo divisore superi il dividendo, dovrà abbassarsi di un' unità la cifra ultimamente segnata tanto nella radice co-

stamente otterremo con aggiungere l'intera seconda classe 300 al 12000 doppio della prima, e quindi moltiplicare il tutto per la stessa seconda classe 300. Infatti 12000+300 il tutto moltiplicato per 300 dà evidentemente $12000\times300+300\times300$. Questo prodotto ascenderebbe nel suo totale a 3690000; frattanto il sottrarre 3690000 dal resto 4297104 è visibilmente lo stesso che sottrarre 369 da 429, e aggiungere 7104 a destra dell'avanzo; e come $369=3\times123$ cioè eguaglia il prodotto della seconda cifra 3 della radice nella prima 6 raddoppiata, e quindi aumentata a destra della seconda, è dunque chiaro che operando semplicemente secondo il prescritto dalla regola, noi verremo a togliere dal resto precedente il secondo e terzo termine del quadrato totale, e il nuovo resto che avremo, cioè 607104 non conterrà se non che i quattro ultimi termini di esso quadrato.

Ripetendo su questi lo stesso raziocinio che sopra, osserveremo che il maggiore fra di loro è quello sotto il numero 4 risultante dal doppio della prima e seconda classe della radice nella terza. Questo prodotto, che proviene da un fattore composto di migliaia e centinaia in un altro composto di sole diecine, deve terminare in 3 zeri: onde niente influirà su quella parte del resto 607104 che è rappresentata dalle tre ultime cifre, ma soltanto sull'altra rappresentata dalle prime e che equivale a 607000. Ora il quarto termine, di cui qui si tratta, essendo eguale alla doppia somma della prima e seconda parte della radice nella terza, ossia al doppio delle migliaia e centinaia nelle diecine, equivarrà ancora al doppio delle migliaia e centinaia moltiplicato prima per 10 e quindi per la cifra delle diecine. Dunque se la porzione 607000, di cui questo quarto termine forma la parte maggiore, si divida per 126000 prodotto di 10 nel doppio della prima e seconda classe della radice, oppure, il che è lo stesso, se come prescrive la regola si divide il 607 per 126, il quoziente 4 che risulta esprimerà il numero di diecine contenute nella radice, aggiunte al 12600, doppio delle migliaia e centinaia, e quindi moltiplicate per il fattore 12640 che ne proviene, daranno in prodotto 495600, che oltre il quarto termine del quadrato conterrà visibilmente anche il 5.°, cioè il quadrato 40×40: onde sottratto questo prodotto dal resto precedente 607104, o per compendio sottratto dalle prime 4 cifre di questo resto, cioè da 6071, le prime quattro cifre del prodotto 505600, cioè 5056, il nuovo resto 101504 non conterrà che le ultime due parti del quadrato totale. E siccome il prodotto 5056 risulta da quello di 1264×4, cioè di 126 doppio di 63, parte già stabilita della radice, aumentato a destra di 4, nuova cifra della radice, e quindi per questa stessa nuova radice mol-

me nel divisore. Si può veder l'applicazione di questa regola nel primo dei seguenti esempi.

Esempio I.°	Esempio II.°	Esempio III.°
267	58,8047	7,56
2 7,12,89	5 34,58	7 57,3
46 312	108 958	145 830
527 3689	1168 9400	1506 10500
	117604 560000	1464
	1176087 8958400	

2.° Se in fondo all'operazione si abbia un resto, ciò spiegherà che il dato numero non è quadrato e che per conseguenza non può aversene la radice esatta. Volendola approssimata si aggiungeranno due zeri all'ultimo resto, e si rinnoverà l'operazione come sopra: accanto al nuovo resto, che così si otterrà, si aggiungeranno di nuovo due altri zeri, e di nuovo si ripeterà l'operazione, così continuando sull'istesso sistema, finchè non piacerà di arrestarci. Si osservi però, che tutte le cifre che entreranno in radice

tiplicato; è dunque manifesto che tutta la precedente operazione continua a non differire in niente da ciò che prescrive la regola.

Infine delle ultime due parti del quadrato totale contenuto, come abbiamo detto, nell'ultimo resto, la maggiore è la 6.a risultante dal doppio della somma delle prime tre parti della radice nella quarta. Se dunque conforme la regola prescrive si raddoppino quelle tre prime parti, il che darà 12680, e per queste si divida il resto 101504, si avranno subito le unità della radice, che aggiunte al 12680, o quindi moltiplicato per il fattore 12684 che ne risulta, daranno visibilmente in prodotto oltre il sesto termine del quadrato anche il settimo, cioè il quadrato 4×4 dell'unità di radice: onde sottratto questo prodotto da 101504, non dovremo aver resto alcuno se il quadrato proposto è realmente perfetto.

Allorchè poi succeda ciò che abbiamo sopra avvertito, che le cifre le quali così volta per volta risultano per la radice sieno maggiori del resto, i prodotti seguenti proverranno maggiori delle quantità da sottrarsi, appunto come nel caso stesso si osservò dover succedere nella *danda*. In tal caso è ben chiaro che l'abbassamento di un'unità nella cifra trovata in eccesso, sarà quasi sempre bastevole all'eliminazione dell'errore.

dal momento in cui comincia a farsi l'aggiunta degli zeri, sono dell'ordine decimale, e debbono però separarsi dalle prime trovate con la solita virgola. (Vedi il § 86).

3.° Se il quadrato proposto sia in parte composto di decimali, la divisione in classi dovrà principiarsi dall'unità degli interi, e proseguirsi al solito verso la sinistra, e quindi dovranno pure separarsi in classi di due per due anche i decimali, supplendo con uno zero finale, nel caso che si trovino essere in numero caffo. E i decimali in radice dovran cominciare a computarsi al momento che, esaurite le classi degl'interi, si abbassa la prima delle classi decimali. (Vedi il 3.° esempio).

4.° Se il numero proposto avente dei decimali non si troverà esser quadrato esatto, potranno secondo l'avvertenza precedente aggiungersi le coppie che si vorranno di zeri, dei quali quante più se ne porranno, tanto più sarà approssimata la radice.

5.° Se si debba estrarre la radice quadrata da una frazione, si eseguirà tale operazione separatamente sul numeratore e sul denominatore, e il primo resultato si dividerà per il secondo. Così $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1,414}{1,732}=\frac{707}{866}$.

153. Veniamo ora all'estrazione della radice cubica, e prima di darne la regola osserviamo che i cubi dei numeri semplici sono composti da una, da due o da tre cifre, e che questi cubi sono dati dalla serie seguente, la quale è bene apprendere a memoria.

Radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729

Da questa serie si rileva che tutte le terze potenze dei numeri possono avere la loro desinenza con una qualunque delle cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Si debba ora estrarre la radice cubica dal numero 12305472001.

Comincio dal dividere il numero in classi di tre cifre da destra a sinistra, non curando che l'ultima resti di due o di una cifra. Quindi tra i cubi dei numeri semplici scelgo quello che è eguale od immediatamente inferiore alla prima classe a sinistra, la quale per noi è 12: 8 è il cubo cercato che ha per radice 2. Questa cifra che è la prima della radice cercata, la segno al di sopra del numero proposto, ne sottraggo il cubo 8 dalla classe 12, e segno al di sotto il resto ottenuto 4.

```
                        2308
              12,305,472,001
               8
         12 / 43,05
              12167
       1587 / 1384,72
     158700 / 1384720,01
              12294402112
Avanzo           11069889
```

Accanto a questo resto abbasso tutta intera l'altra classe 305, e dal 4305 numero che ne resulta separo con una virgola le due ultime cifre 05: e il 43 numero rimasto lo divido per il triplo del quadrato della cifra 2 già trovata in radice, cioè per $2^2 \times 3 = 12$ che scrivo a sinistra in forma di divisore. Il quoziente è 3 che può esser la 2.ª cifra della radice. Per verificarla opero in questo modo: la pongo accanto al 2 prima cifra trovata in radice, e del numero 23 così ottenuto ne fo il cubo che è 12167. Se questo resultato è maggiore del numero formato dalla 1.ª e 2.ª classe, il 3 anderà diminuito di unità in unità finchè non si abbia, operando come sopra, un cubo eguale o minore alle dette due classi da cui lo sottrarrò. Nel nostro caso il 12167 cubo delle prime due cifre radicali essendo minore delle prime due classi del numero dato, ne fo la sottrazione ed ottengo il resto 138.

Accanto a questo resto 138 abbasso tutta l'altra classe 472, dal 138472 separo le ultime due cifre 72, e divido il 1384 numero rimasto per il triplo del quadrato delle cifre già trovate in radice, cioè per $23^2 \times 3 = 1587$ che posso scrivere a sinistra in forma di divisore. Il quoziente essendo zero, lo pongo senz'altro in radice e ne sarà la terza cifra; e sottraendo dalle prime tre classi del numero dato il cubo delle prime tre cifre ho di resto tutto il numero 138472.

Ripeto quindi di nuovo le stesse operazioni, cioè abbasso accanto al resto la classe successiva 001, ed ho così 138472001; ne separo con una virgola le ultime due cifre 01, e il 1384720 numero rimasto a sinistra lo divido per il triplo quadrato delle cifre già trovate in radice, cioè per 158700 che segno come divisore. Il quoziente, è 9 e può esser la 4.ª cifra della radice. Lo verifico ponendola accanto alle altre tre già trovate e inalzandole tutte a cubo. Siccome il 12310389629 cubo delle quattro cifre della radice è maggiore delle prime quattro classi del numero dato 12305472001, diminuisco di una unità il 9, e prendo 8 che è veramente la quarta cifra cercata, giacchè operando come sopra ho il cubo 12294402112 minore delle prime quattro classi da cui sottratto ho l'avanzo 11069889.

Se nel numero dato vi fossero altre classi, si continuerebbe come sopra; cioè se ne abbasserebbe la prima accanto al resto 11069889 ec. ec. Ma poichè tali classi mancano, concludo che l'operazione è terminata, che $\sqrt[3]{12305472001}=2308$, e che il numero dato non è cubo perfetto avendosi di resto 11069889.

154. Si avverta 1.º che qualora nel numero dato vi fossero cifre decimali, l'operazione si eseguisce come nel caso antecedente e come se non esistesse la virgola: nella radice poi si separano dalla destra tante cifre decimali quante sono nel numero dato le classi costituite intieramente da decimali. Quindi $\sqrt[3]{263{,}374721}=6{,}41$.

2.º Se le cifre decimali del numero dato non sono tre, sei, nove... in generale un multiplo di tre, si renderanno con l'aggiungere degli zeri.

3.º Se il numero proposto non è cubo perfetto, ed ha poche o punte cifre decimali, potranno dietro l'avvertenza precedente aggiungersi le classi che si vorranno di zeri, dei quali quante più se ne porranno, tanto più sarà approssimata la radice. E quindi per esempio $\sqrt[3]{25}$ potrà considerarsi espresso da $\sqrt[3]{25{,}000{,}000}=2{,}92$.

4.° Nelle frazioni s'estrae la radice cubica, eseguendo una tale operazione sopra il denominatore e sopra il numeratore, e dividendo il secondo resultato per il primo. Così $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$.

CALCOLO DELLE POTENZE ESPONENZIALI.

155. Allorchè una potenza non è espressa che per via di esponente, e devesi moltiplicare per una o più potenze di diverso o medesimo grado, ma di una stessa radice, si dia alla radice un esponente eguale alla somma di tutte le potenze da moltiplicarsi, e sarà fatto il prodotto. Così

$$5^3\times5^2=5^5=3125,\quad 3^2\times3^5\times3^9=3^{16}=43046721.$$ [1]

156. Qualora poi in luogo di moltiplicarsi debbano le due potenze dividersi l'una per l'altra, in tal caso se la potenza che sta per dividendo è maggiore di quella che sta per divisore, si segnerà per quoziente la radice con un esponente, che eguagli la differenza tra quelli delle due potenze date. Così se debba dividersi 7^9 per 7^3 si avrà in quoziente $7^{9-3}=7^6$, e potrà dunque stabilirsi $\frac{7^9}{7^3}=7^6$. [2]

157. Nel caso contrario, quando cioè la potenza che divide è maggiore di quella che deve esser divisa, il quoziente si esprime con l'unità divisa per la radice comune, con esponente eguale alla differenza di quelli delle due potenze proposte. Così $\frac{3^3}{3^5}=\frac{1}{3^{5-3}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\frac{4^3}{4^7}=\frac{1}{4^{7-3}}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$. [3]

158. Si avverta che anche in questo caso si può se-

[1] Infatti $5^3=5\times5\times5$, $5^2=5\times5$; dunque $5^3\times5^2=5\times5\times5\times5\times5=5^5$ $=3125$.

[2] Infatti $7^9=7^6\times7^3$, dunque $7^9:7^3=\frac{7^6\times7^3}{7^3}=7^6\times\frac{7^3}{7^3}=7^6\times1=7^6$.

[3] Si ha $3^5=3^3\times3^2$; dunque $\frac{3^3}{3^5}=\frac{3^3}{3^3\times3^2}=\frac{3^3}{3^3}\times\frac{1}{3^2}=1\times\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

gnare il quoziente come nel caso opposto; purchè si dia all'esponente il segno negativo. Così riprendendo i due esempi sarà $\frac{3^3}{3^5}=3^{3-5}=3^{-2}$; $\frac{4^3}{4^7}=4^{3-7}=4^{-4}$.

159. Di qui s'impara 1.° Che essendo 3^{-2}, ed $\frac{1}{3^2}$, quozienti di uno stesso dividendo e di uno stesso divisore, sarà dunque $3^{-2}=\frac{1}{3^2}$, cioè le potenze negative si rendono positive con ridurle a forma di rotto, il cui numeratore sia l'unità, e il denominatore la potenza già cangiata di negativa in positiva.

2.° Che se debba dividersi una potenza di qualunque grado per sè medesima, come per esempio 6^3 per 6^3, avremo applicando la regola data $\frac{6^3}{6^3}=6^{3-3}=6^0$. Ma è chiara cosa che un numero qualunque siasi, diviso per sè medesimo, dà per quoziente l'unità: dunque essendo in forza di questo principio $\frac{6^3}{6^3}=1$, sarà pure $6^0=1$; con che si verifica ciò che abbiamo già detto, cioè che la potenza zero, qualunque si sia il numero a cui è attribuita, rappresenta sempre l'unità (§ 146).

160. Se vogliasi elevare ad una potenza qualunque una radice o quantità già affetta di eguale o d'altro esponente, come per esempio, se debba elevarsi a cubo 6^5, si moltiplichi l'esponente della quantità data per il grado della potenza a cui deve elevarsi, e il prodotto si assegni per nuovo esponente alla suddetta quantità o radice data. Così nel nostro caso il 6^5 alzato a cubo diverrà 6^{15};[1] come il 7^3 alla seconda potenza o a quadrato diverrà 7^6.

161. Se poi da una radice o quantità affetta, come sopra, di esponente debba estrarsi una radice di eguale o diverso grado, se ne dividerà l'esponente per il grado della radice, schisando, se occorrerà, il rotto che ne resulta.

[1] Infatti 6^5 alzato a cubo è $=6^5\times6^5\times6^5=6^{5+5+5}=6^{15}=6^{5\times3}$.

Così $\sqrt[3]{7^6}=7^{\frac{6}{3}}=7^2=49$; $\sqrt[2]{3^4}=3^{\frac{4}{2}}=3^2=9$; $\sqrt[4]{5^{10}}=5^{\frac{10}{4}}=5^{\frac{5}{2}}$; $\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$. [1]

162. Di qui pure s'impara 1.° Che nel modo istesso in cui $\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$; così $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}$, cioè i radicali posson convertirsi in potenze frazionarie, e le potenze frazionarie in radicali, sol che in quest'ultimo caso si tolga alla frazione il suo denominatore, e si stabilisca per indice o esponente della radice.

2.° Che dovendo fare la moltiplicazione di radicali, sempre inteso che la quantità sotto di essi si trovi in ognuno la stessa, comunque ne sia diverso l'esponente, basterà ridurla a potenza frazionaria, e quindi applicar nudamente la regola già data per la moltiplicazione delle potenze esponenziali (155). Così $\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt[4]{5}=5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=5^{\frac{8+3}{12}}=5^{\frac{11}{12}}=\sqrt[12]{5^{11}}$; e parimente $\sqrt[3]{6^4}:\sqrt[4]{6^3}=6^{\frac{4}{3}}:6^{\frac{3}{4}}=6^{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}=6^{\frac{16-9}{12}}=6^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{6^7}$.

DELLE PROPORZIONI E DELLE REGOLE SUPERIORI ARITMETICHE CHE DA ESSE DIPENDONO.

Delle Proporzioni.

163. La differenza o il quoziente, che risulta da due quantità omogenee paragonate fra di loro, si chiama *ragione* o *rapporto*. Delle due quantità che si paragonano, la prima che si scrive o si pronunzia si chiama *antecedente*, l'altra *conseguente*, oppure ambedue *termini* della *ragione*.

164. Se nel confronto di due quantità si consideri la differenza, che nasce sottraendo l'una dall'altra, questa diffe-

[1] Infatti se $7^{\frac{6}{3}}\times7^{\frac{6}{3}}\times7^{\frac{6}{3}}=7^{\frac{18}{3}}=7^6$, sarà dunque 7^6 il cubo di $7^{\frac{6}{3}}$, e quindi $7^{\frac{6}{3}}$ la radice cuba di 7^6.

renza si chiama *rapporto* o *ragione aritmetica;* così la ragione aritmetica di 16 a 7 è 9; e di 18 a 6 è 12.

Se poi nel paragone di due quantità si consideri il numero delle volte, che una contiene l'altra, ossia il quoziente, che risulta dalla divisione di una quantità per l'altra, questo quoziente si dice *rapporto* o *ragione geometrica* o semplicemente *ragione;* così la ragione geometrica di 16 a 7 è $2\frac{2}{7}$, e di 18 a 6 è 3.

165. Quando la differenza che passa fra due quantità è eguale alla differenza che passa fra due altre, le quattro quantità, ovvero i quattro termini, si dicono in *proporzione aritmetica;* così i termini 5 e 3, 9 e 7 sono in proporzione, perchè 5 e 3 differiscono di 2 come 9 e 7. Una tal proporzione si nota in questo modo 5 : 3 .·. 9 : 7 oppure 5. 3 : 9. 7 che si pronunzia 5 sta aritmeticamente a 3, come 9 a 7, e vuol dire che il 3 è tanto minore o tanto differisce dal 5 quanto il 7 dal 9; similmente sono proporzioni aritmetiche le seguenti: 11 : 5 .·. 19 : 13; 23 : 18 .·. 6 : 1.

Se la ragione geometrica o il quoziente di due quantità è eguale a quello di due altre, le quattro quantità o i quattro termini sono in *proporzione geometrica.* Così 18 diviso per 6 dà per quoziente 3, come lo dà 12 diviso per 4; perciò i quattro termini 18, 6, 12, 4, sono geometricamente proporzionali, e per convenzione si scrivono così: 18 : 6 : : 12 : 4 che si pronunzia 18 sta a 6 *come* 12 a 4, e vuol dire che il 18 diviso per 6 dà il quoziente medesimo che il 12 diviso per 4. Sono egualmente proporzioni geometriche queste: 8 : 4 : : 10 : 5; 28 : 7 :: 16 : 4.

166. In ambedue le proporzioni il primo ed il terzo termine si chiamano *antecedenti,* il secondo ed il quarto *conseguenti* della proporzione. Ed anche il primo ed il quarto si dicono *estremi;* il secondo ed il terzo *medj* o *intermedj* della proporzione.

167. Quando in una proporzione il termine, che è conseguente della prima ragione, si trova essere ancora antecedente della seconda, la proporzione si dice *continua*, e

il termine ripetuto si chiama *medio proporzionale,* o semplicemente *medio:* così son continue le due proporzioni 12. 9 : 9. 6 e 20 : 10 : : 10 : 5 l'una aritmetica, e l'altra geometrica. Per compendio si suole il termine medio scrivere una sola volta; e in tal caso si antepone il segno .·. ovvero: alla proporzione aritmetica, e il segno :: alla geometrica. Così le due precedenti possono scriversi : 12. 9. 6 ; : : 20 : 10 : 5, e si leggono nel modo che sopra, cioè il 12 a 9 sta *aritmeticamente* come il 9 a 6; il 20 a 10 sta *geometricamente* come il 10 a 5.

168. Se si abbia una serie di quantità, che crescano o scemino nella stessa ragione continua o aritmetica o geometrica, quella serie di termini o di quantità si chiama *progressione,* la quale è perciò o aritmetica se la ragione è aritmetica, come 25 : 20 : 15 : 10 : 5, o geometrica se la ragione è geometrica, come 48 : 24 : 12 : 6 : 3. Di queste parleremo a suo luogo in séguito, basti per ora averle accennate. Si avverta in fine che allorchè si annunzia semplicemente una ragione o una proporzione senz'altro aggiunto, s'intende sempre parlare di ragione o proporzione geometrica. Passiamo alle proprietà fondamentali dell'una e dell'altra proporzione.

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI ARITMETICHE E GEOMETRICHE.

169. In ogni proporzione aritmetica la somma dei due termini estremi eguaglia quella dei termini medj; e in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi eguaglia quello dei medj. Così nella proporzione aritmetica 12. 8 : 6. 2 la somma degli estremi è 14, come è quella dei medj, e nella geometrica 3 : 12 : : 4 : 16, tanto il prodotto degli estremi 3 e 16, quanto quello dei medi 12 e 4 danno 48.[1]

[1] Prima di dar conto di questa proprietà e d'altre molte, che ne di-

170. Se la proporzione è continua aritmetica, la somma degli estremi eguaglierà il doppio del medio proporzionale; se è continua geometrica, il prodotto degli estremi eguaglierà il quadrato di esso medio proporzionale.[1]

171. In ogni proporzione aritmetica, qualunque dei ter-

pendono, sarà ben fatto di prevenire i giovani principianti sui principj che seguono.

1.° Se due quantità sono eguali restano visibilmente eguali o vi si aggiungano o se ne tolgano quantità eguali, o per eguali quantità si moltiplichino o si dividano. Così, essendo $6+2=8$ sarà ancora $6+2+3=8+3$; $6+2-4=8-4$, $(6+2)\times3=8\times3$, $\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}$. Tutto ciò è manifesto.

2.° Quindi data un' eguaglianza qualunque (che così si chiama ogni espressione numerica nella quale una quantità sia eguagliata ad un'altra) si può da una delle due parti o membra dell' eguaglianza trasportare nell' altra qualunque delle quantità che vi si contengono, purchè si cangi di segno, cioè si riduca negativa se era positiva, positiva se negativa. Così se come sopra si abbia $6+2=8$ potrà farsi $6=8-2$; infatti l' aver aggiunto il 2 con segno negativo al secondo membro, è lo stesso che avernelo tolto come è stato fatto dal primo. Egualmente se si abbia $5-3=2$, oppure $5=6-1$, potrò con tutta sicurezza porre $5=2+3$; $5+1=6$, oppure $5-2=3$, $1=6-5$, ec.

3.° Nel modo stesso se uno dei membri ha un moltiplicatore o un divisore potremo portare il moltiplicatore in divisore dell' altro membro, e il divisore in moltiplicatore. Così essendo $6=2\times3$ sarà pure $\frac{6}{2}=3$, parimente avendosi $\frac{30}{3}=10$ sarà $30=3\times10$ ec., come ancora se $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$. sarà $3\times8=6\times4$, come è troppo chiaro.

Ciò premesso, se i quattro termini 12, 8, 6, 2 si trovano in proporzione aritmetica dovrà aversi per natura di queste proporzioni $12-8=6-2$ (165); dunque ancora (osservazione 2 di questa nota) $12+2$ (somma degli estremi) $=8+6$ (somma dei medj).

E se i quattro termini 3, 12, 4, 16 sono in proporzione geometrica dovrà aversi (165) $\frac{12}{3}=\frac{16}{4}$; dunque altresì 12×4 (prodotto dei medj $=3\times16$ prodotto degli estremi.

[1] Nella proporzione continua il medio proporzionale sta in luogo dei due medj eguali: dunque ove ha luogo la somma e il prodotto dei termini medj avrà luogo il doppio o il quadrato del termine medio proporzionale.

mini estremi eguaglia la somma dei medj, meno l'altro estremo, e qualunque dei medj eguaglia la somma degli estremi, meno quella dell'altro medio. Così nella proporzione 6 . 3 : 10 . 7 si ha l'estremo $7=3+10-6=13-6$, e il medio $3=6+7-10$.[1]

172. In ogni proporzione geometrica, qualunque dei termini estremi eguaglia il prodotto dei medj diviso per l'altro estremo; e qualunque dei medj eguaglia il prodotto degli estremi diviso per l'altro medio. Così nella proporzione 5 : 10 : : 8 : 16, si ha l'estremo $5=\frac{8\times10}{16}=\frac{80}{16}$, e il medio $8=\frac{5\times16}{10}=\frac{80}{10}$.[2]

173. Se le proporzioni son continue, il medio eguaglierà nell'aritmetiche la metà della somma degli estremi, e ciascuno di questi eguaglierà il doppio del medio, meno l'altro estremo. Nelle geometriche il medio eguaglia la radice del prodotto dei due estremi, e qualunque dei due estremi eguaglia il quadrato del medio diviso per l'altro estremo. Così nella proporzione continua : 5. 8. 11 si ha il medio $8=\frac{5+11}{2}=\frac{16}{2}$, e l'estremo $5=2\times8-11=16-11$; e nella continua geometrica : : 6 : 12 : 24 si ha il medio $12=\sqrt{6\times24}$ $=\sqrt{144}$, e l'estremo $24=\frac{12^2}{6}=\frac{144}{6}$.

174. Tutto ciò fa strada a sciogliere un interessantissimo quesito, cioè: *dati tre termini* di una proporzione aritmetica o geometrica *trovarne il quarto mancante.*

Se la proporzione è aritmetica e il termine mancante è uno degli estremi, si troverà togliendo l'altro estremo

[1] Infatti dovendo essere $6+7=3+10$ (170) dovrà altresì aversi (169, nota 1, 2.°) $7=3+10-6$, e anche $3=6+7-10$.

[2] Qui pure dovendo aversi per natura della proporzione geometrica $5\times16=8\times10$ sarà $5=\frac{8\times10}{16}=\frac{80}{16}$ (169 nota 1, 3.°) come pure $8=\frac{5\times16}{10}$. Questi schiarimenti vaglion per tutti i casi seguenti.

dato dalla somma dei due medj; se è uno dei medj, si troverà togliendo l'altro medio dato dalla somma dei due estremi. Se la proporzione è geometrica, il termine mancante nel primo caso si troverà dividendo per l'estremo dato il prodotto dei medj, e nel secondo dividendo per il medio dato il prodotto degli estremi.

175. Per maggior comodò e semplicità d'esposizione si usa in pratica di designare con la lettera x il termine ignoto che si cerca: per tal modo riesce più facile d'impostare le proporzioni, porre al loro vero luogo i termini dati, e applicare alla ricerca del termine ignoto, rappresentato in tal modo da x, i sopraddetti precetti. Così supponendo che i numeri 3, 9, 15 sieno i primi tre termini di una proporzione geometrica, e se ne cerchi l'estremo finale, si comincia dall'impostare la proporzione in questa forma $3:9::15:x$, e quindi x stando in luogo del termine che si cerca, è chiaro che per determinarne il valore dovremo secondo il precetto già dato (174) porre $x=\frac{9\times15}{3}=\frac{135}{3}=45$. Dal che resulta che il termine mancante è 45, ed in fatti il 45 contiene il 15 tante volte quante il 9 contiene il 3.

Egualmente se 5, 9, 18 sieno il primo, terzo e quarto termine di una proporzione aritmetica, per aver il secondo che manca, porremo x in suo luogo e imposteremo così $5\,.\,x:9\,.\,18$; e quindi secondo il precetto avremo $x=5+18-9=14$, cioè il termine mancante è 14, e l'intera proporzione è $5\,.\,14:9\,.\,18$.

176. Nel modo stesso se 3, 27 sieno gli estremi di una proporzione continua geometrica e se ne voglia il medio si porrà $::3:x:27$ ed avremo $x=\sqrt{3\times27}=\sqrt{81}=9$; e se dati i due termini 3, 9 si voglia il terzo proporzionale, avremo $3:9:x$; ed $x=\frac{81}{3}=27$.

177. Se quattro quantità sono tali, che il prodotto di due di esse sia eguale a quello delle altre due, queste quattro quantità sono proporzionali, cioè uno qualunque dei due

fattori del primo prodotto starà a uno qualunque dei due fattori del secondo, come l'altro fattore del secondo starà all'altro del primo; così poichè $3\times15=5\times9$ sarà $3:5::9:15$. Infatti siccome dalla proporzione $3:5::9:15$ risulta appunto l'eguaglianza $3\times15=5\times9$, è manifesto che retrocedendo da quest'eguaglianza dovrà risultare la proporzione.

178. Se quattro quantità sono in proporzione, lo saranno ancora se si mettono gli estremi in luogo dei medj, e i medj in luogo degli estremi, o un medio in luogo dell'altro medio e un estremo in luogo dell'altro estremo; poichè questi cangiamenti niente turbano l'eguaglianza fra i prodotti dei medj e degli estremi. Così la proporzione $3:15::9:45$ si può cangiare $15:3::45:9$, oppure $15:45::3:9$, oppure $9:3::45:15$ ec.

179. In generale si posson fare in proporzione aritmetica o geometrica tutti quei cangiamenti, che non alterano l'eguaglianza delle somme o dei prodotti dei medj e degli estremi. Perciò oltre quelli che si sono di già accennati, ne potranno aver luogo anche infiniti altri, tra i quali noteremo i seguenti spettanti alle proporzioni geometriche.

1.° Si potrà moltiplicare e dividere per qualunque numero un termine estremo ed un medio. Ciò infatti non può alterar l'eguaglianza dei prodotti, ciascuno dei quali si troverà visibilmente affetto dal moltiplicatore o divisore novamente introdotto. Così data la proporzione $6:8::3:4$, proporzione benissimo sussistente, essendo che $4\times6=3\times8$, potremo stabilire $6\times5:8\times5::3:4$, e si avranno i due prodotti eguali $4\times6\times5=3\times8\times5$, l'uno o l'altro dei quali non sono che i prodotti 4×6, 3×8 moltiplicati per 5.

2.° A più forte ragione potremo moltiplicare o dividere per una stessa quantità tutti i termini di una proporzione, come pure moltiplicare o dividere ciascun termine di una proporzione per ciascuno dei termini corrispondenti di una o più altre. Così avendo $3:8::6:16$, e $2:3::8:12$ potremo concludere $3\times2:8\times3::6\times8:16\times12$. Infatti il prodotto degli estremi è qui $3\,.\,16\times2\,.\,12$, quello dei medj

è $8 . 6\times3 . 8$, l'uno dei quali deve essere visibilmente eguale all'altro, giacchè i primi dei due fattori, in cui son decomposti, sono eguali, in forza della prima proporzione; i secondi in forza della seconda.

3.° Di qui ne viene che se un termine qualunque di una proporzione è frazionario, si potrà trasportare il denominatore di un medio moltiplicatore di un estremo, e il denominatore di un estremo moltiplicatore d'un medio. Così la proporzione $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} :: 9 : 10$ si riduce a $3 : \frac{5\times4}{6} :: 9 : 10$ ovvero a $3\times6 : 5\times4 :: 9 : 10$.[1]

4.° Potremo inoltre elevar tutti i termini ad una potenza del medesimo grado, poichè ciò equivale alla moltiplicazione di più proporzioni fra loro eguali.

5.° L'antecedente della prima ragione starà all'antecedente della seconda, come la somma dei due antecedenti alla somma dei conseguenti. Così data la proporzione $8 : 12 :: 6 : 9$, potremo porre $8 : 12 :: 8+6 : 12+9$. Infatti quest'operazione non fa che aggiungere tanto al prodotto degli estremi, come a quello dei medj la quantità comune 12×8, onde i due prodotti restano eguali.

Per l'istessa ragione potremo porre un antecedente al suo conseguente, come la differenza dei due antecedenti a quella dei conseguenti, come la differenza di quelli alla differenza di questi ec.

180. Quattro quantità possono essere in *ragione diretta* o in *ragione inversa*. (Quest'ultima si dice ancora *ragione indiretta*).

Sono in *ragione diretta* quando il primo termine sta al secondo, come il terzo al quarto, come 12, 3, 8, 2.

Sono in *ragione inversa*, quando il primo antecedente sta al suo conseguente, come il secondo conseguente sta al suo antecedente, vale a dire quando la prima quantità con-

[1] Infatti la proporzione $3/4 : 5/6 :: 9 : 10$ può moltiplicarsi (§ 179, 1.°) nel 1.° e 2.° termine per 4×6 e si cangia in $3/4\times4\times6 : 5/6\times4\times6 :: 9 : 10$ ossia $3\times6 : 5\times4 :: 9 : 10$.

tiene o è contenuta nella seconda tante volte, quante volte la terza è contenuta o contiene la quarta. Così 15 sta a 5 in ragione inversa di 3 a 9. In questo caso sarà necessario per cambiare la ragione inversa in ragione diretta, o situare un antecedente nel luogo del suo conseguente e reciprocamente, e così invece di scrivere 15 : 5 : : 3 : 9, scriveremo 15 : 5 : : 9 : 3, oppure dei due ultimi termini della proporzione, lasciati nei loro posti, formare due rotti, il numeratore dei quali sia l'unità, e i denominatori sieno i due termini stessi; così invece di 15 : 5 : : 3 : 9, si esprime direttamente la proporzione in tal forma: $15 : 5 :: \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, infatti $\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

181. Le proporzioni hanno delle applicazioni continue in tutte le parti delle Matematiche. Nell'aritmetica si applicano specialmente le proporzioni geometriche, sulle quali sono fondate le regole 1.ª del *tre semplice, diretta ed inversa;* 2.ª del *tre composta, diretta ed inversa;* 3.ª di *semplice falsa posizione;* 4.ª di *doppia falsa posizione;* 5.ª di *interesse semplice e composto;* 6.ª di *società e compagnia;* 7.ª d'*alligazione;* 8.ª *sui fondi pubblici.*

DELLE REGOLE SUPERIORI ARITMETICHE.

182. Dati tre termini di una proporzione geometrica si può sempre trovare il quarto proporzionale, che è uno degli estremi o uno dei medj. Il metodo che insegna a trovare questo quarto proporzionale si chiama *regola del tre.* Questo metodo fondato sui principj già stabiliti non soffre altra difficoltà, che quella di poter giungere a ben rilevare dal quesito quali sieno i termini estremi e quali i medj, ovvero qual sia l'ordine, in cui debbano collocarsi per ridurli giustamente in proporzione.

183. A tale effetto si rendono necessarie le tre seguenti osservazioni.

1.ª Dei tre termini dati due sono sempre *omogenei* fra loro, cioè spettano a quantità relative ad uno stesso ge-

nere di cose, e il terzo detto ancora *solitario*, è omogeneo al nuovo che si cerca. Così chi proponesse: se 19 uomini hanno fatto un determinato lavoro in 15 giorni, 30 uomini in quanti giorni lo compiranno? In questo quesito sono visibilmente omogenei fra loro il 19 e il 30, l'uno e l'altro dei quali rappresentano quantità di uomini: mentre il solitario 15, egualmente che il numero che si cerca, indicano quantità di tempo o di giorni.

2.ª Dei due omogenei dati l'uno è con l'interrogazione, e l'altro è senza. Nell'esempio citato allorchè si dice che 19 uomini hanno fatto un lavoro in 15 giorni, niente si domanda, e solo si asserisce o si narra una cosa avvenuta, onde l'omogeneo dato 19 è qui senza interrogazione; ma quando poi si passa a cercare in quanto tempo compiranno il dato lavoro 30 uomini, si fa rapporto a questi 30 uomini una domanda, e il termine 30 è dunque l'omogeneo con l'interrogazione.

3.ª In fine la regola del tre è talora *diretta* e talora *inversa*. È diretta qualora crescendo o scemando l'omogeneo con l'interrogazione, si prevede che dovrà proporzionatamente crescere o scemare con lui la quantità che si cerca. È inversa nel caso opposto, cioè qualora al crescere dell'omogeneo viene a scemare la quantità cercata, o questa viene a crescere quando l'omogeneo scemi. Così nell'esempio addotto la regola è inversa, essendo manifesto che quanto fossero in maggiore o minor numero gli uomini che si vogliono impiegare, altrettanto sarebbe oppostamente minore o maggiore il numero dei giorni, nei quali si troverebbe compito il lavoro. Ma se si proponesse: 50 metri di panno sono costati 80 lire, quanto costeranno 39 metri? La regola sarebbe diretta, poichè è ben chiaro che quanto più o meno metri si staccheranno, tanto più o meno di denaro converrà dare in pagamento.

184. Tutto questo premesso, ecco il metodo costante da tenersi per ben disporre i termini nella regola del tre. Rilevati dal quesito i due termini omogenei si *collocherà in*

primo luogo l'omogeneo senza interrogazione, dipoi quello con l'interrogazione. Quindi se la regola è diretta *si porrà in terzo luogo il solitario e in ultimo la lettera x, che sta in luogo del termine ignoto* (175). Se poi la regola è inversa, *si porrà in terzo luogo la lettera x e in ultimo il solitario.* Così nel primo dei due esempi arrecati nei quali l'omogeneo senza interrogazione è 19, l'altro 30, il solitario è 15, e la regola come abbiamo veduto è inversa, si scriverà $19 : 30 :: x : 15$; ed operando in seguito secondo i precetti già dati nelle proporzioni (174), avremo $30 \times x = 15 \times 19$, ed $x = \frac{15 \times 19}{30} = 9\frac{1}{2}$ numero dei giorni cercati. E nel secondo esempio nel quale l'omogeneo senza interrogazione è 50, l'altro 39, il solitario 80, e la regola è diretta, porremo $50 : 39 :: 80 : x$, e sarà $x = \frac{39 \times 80}{50} = 62{,}40$ prezzo dei 39 metri di panno.

185. Osservate che prima di trovare il valore del termine incognito, sarà bene di rendere più semplici, qualora si possa, i termini dati: il che ha luogo tutte le volte che essi siano frazionari, o che un medio ed un estremo si possan dividere per un numero stesso, secondo il precetto dato (179).

186. Osservate di più che nella regola inversa può, se si vuole, mettersi il termine incognito in ultimo luogo; ma in tal caso, o deve porsi in primo luogo l'omogeneo con l'interrogazione, e quindi l'altro senza; oppure tanto il termine solitario, quanto l'incognito debbon darsi per denominatori all'unità. Così nel primo esempio allegato può scriversi $30 : 19 :: 15 : x$, oppure $19 : 30 :: \frac{1}{15} : \frac{1}{x}$. Ambedue queste maniere si trovano usate, e l'ultima specialmente può essere in molti casi di qualche comodo.[1]

[1] È evidente che qualunque delle tre maniere si adopri, il risultamento è lo stesso. Infatti se in luogo di scrivere $19 : 30 :: x : 15$ si scriva $30 : 19 :: 15 : x$, oppure $19 : 30 :: {}^1/_{15} : {}^1/x$, nel primo caso non si fa che porre i termini medj in luogo degli estremi, e viceversa (178) nel secondo si divide per 15 e per x l'antecedente e conseguente dell'ultima ragione.

187. Altri consigliano di *preparare* o *tradurre* il quesito collo scrivere i termini che debbono formare la proporzione in due linee, mettendo nella prima i due termini che hanno stretta relazione tra loro e nella seconda il solitario e l'incognita x. Ecco la *traduzione* del 2.° esempio:

Metri		Lire
50	. . .	80
39	. . .	x

Visto che è quesito di regola del tre diretta si dispone per 1.° termine il primo della linea superiore, per 2.° il primo della linea inferiore, per 3.° il secondo della linea superiore e finalmente l'incognita x: e così si ha $50 : 39 :: 80 : x$ d'onde $x = \frac{39 \times 80}{50}$

Il 2.° esempio si traduce nel modo seguente:

Uomini		Giorni
19	. . .	15
30	. . .	x

Visto che la regola è inversa si dispongono i primi due termini al contrario che nella diretta, mettendo pel 1.° il termine primo della linea inferiore, poi quello della superiore, e per 3.° e 4.° i soliti: per cui si ha $30 : 19 :: 15 : x$ d'onde $x = \frac{15 \times 19}{30}$.

188. *Esempio* I. — Fu accordata a Pietro una pensione annua di L. 1800. Egli morì dopo mesi 3, giorni 11, ore 21, di qual somma sono creditori i suoi eredi?

L'anno essendo composto di mesi 12, questi mesi 12 e i mesi 3, giorni 11, ore 21, sono gli omogenei, il primo senza interrogazione, l'altro con interrogazione. Il solitario è 1800; e siccome se più mesi avesse Pietro sopravvissuto più gli correva di pensione, la regola è diretta e dovrà impostarsi così:

Mesi 12 : Mesi 3. 11. 21 : : L. 1800 : x

Si dividano per 12 i due antecedenti e si avrà

Mesi 1 : Mesi 3. 11. 21 : : L. 150 : x

Si riduca il secondo termine all'infima specie, e si avrà

$$1 : \frac{489}{144} :: 150 : x$$

Moltiplicati i due medj, e diviso il prodotto per l'estremo 1 moltiplicato (179; 3.°) in 144 si ha x=L. 509,37 $^1/_2$ somma da pagarsi agli eredi di Pietro.

Esempio II. — Cg. 15840 di piombo importano L. 25344; quanto dunque costeranno Cg. 1000? Cg. 15840 e Cg. 1000 sono i termini omogenei, il primo senza, l'altro con l'interrogazione; e siccome diminuendo questo, cioè diminuendo i chilogrammi di piombo da provvedersi, diminuisce ancora il numerario da rilasciarsi per farne acquisto, così la regola è diretta ed ecco la proporzione

Cg. 15840 : Cg. 1000 : : L. 25344 : x

divido i primi due termini per 10 ed ho

Cg. 1584 : Cg. 100 : : L. 25344 : x

divido di nuovo i due primi termini della proporzione per 4 ed ottengo

Cg. 396 : Cg. 25 : : L. 25344 : x

divido pure il primo e il terzo termine per 4, 9 e 11 successivamente

Cg. 99 : Cg. 25 : : L. 6336 : x

Cg. 11 : Cg. 25 : : L. 704 : x

Cg. 1 : Cg. 25 : : L. 64 : x

moltiplico i due medj ed il loro prodotto è il termine cercato e si ha x=L. 64×25=L. 1600.

Esempio III. — In una fortezza che è sul punto d'essere assediata vi sono dei viveri da alimentare 3051 soldati per 8 mesi: si domanda quanti soldati si potrebbero alimentare con gli stessi viveri per 6 mesi?

Gli 8 mesi e i 6 mesi sono qui i termini omogenei, l'interrogazione è al secondo: e diminuendo questi, cioè il tempo prescritto per il consumo delle provvisioni, crescerà visibilmente il numero dei soldati, che potranno ali-

mentarsi: così la regola è inversa, e dovrà dunque impostarsi nel modo che segue:

Mesi 8 : Mesi 6 : : x : Soldati 3051

divido i due primi termini per 2 ed ho

$4 : 3 :: x : 3051$

divido il secondo ed il quarto per 3, ed ottengo

$4 : 1 :: x : 1017$

onde $x=4\times1017=4068$, che è il numero dei soldati cercato.

Ora si risolvano per esercizio i seguenti quesiti.

1.° Un vascello, spirando un vento uniforme, ha fatto 125 Chilometri in 9 ore, in quanto tempo ne farebbe 350, posta la medesima circostanza? Risp. Li farebbe in ore 25 e minuti 12.

2.° Se Cg. 100 di seta costano L. 1325,20 quanto costeranno Cg. 347,500 alla medesima ragione? Risp. Costeranno L. 4605,07.

3.° Fu parata una stanza con metri 354 e $\frac{2}{3}$ di mantino largo metri 1 e $\frac{1}{3}$; per pararla con del mantino largo metri 1 e $\frac{2}{3}$ quanti metri ne occorreranno? Risp. Ne occorreranno metri 283,73.

4.° Per votare un magazzino di mercanzie sono stati consumati giorni 12 da 9 lavoranti, quanti lavoranti lo avrebbero votato in giorni 7, ore 4 e minuti 48? Risp. L'avrebbero votato lavoranti 15.

DELLA REGOLA DEL TRE COMPOSTA DIRETTA E INVERSA.

189. Non sempre sono date tre quantità, e se ne cerca una quarta, come negli esempi che abbiamo veduto sino al presente: alcune volte sono date cinque quantità, e se ne cerca una sesta, altre volte ne sono date sette, e se ne cerca un'ottava ec. Il metodo col quale si determina questa sesta, ovvero ottava quantità dicesi regola del tre composta, ossia regola del *cinque,* del *sette* ec. Di queste cinque o sette quantità date, due a due debbono essere

omogenee fra loro, e la rimanente è la solitaria, ed a questa deve essere omogenea la quantità che si cerca e che si determina col metodo seguente.

Si prendono due qualunque delle quantità omogenee date, e si stabilisce tra loro e la solitaria una regola del tre inversa o diretta, secondo che la natura della questione, ridotta a questi soli tre termini, lo porterebbe. Quindi si prendono le altre due omogenee date, e si stabilisce una seconda regola del tre fra queste e il resultamento precedente. Ciò che proviene da quest' ultima operazione sarà la quantità cercata, se cinque sole sono le quantità date. Che se sono sette, si prosegue istituendo una terza regola del tre fra le due quantità rimanenti e l' ultimo resultamento, e ciò che ne deriva, equivarrà a ciò che si cerca. Nel modo stesso dovrebbe continuarsi, se le quantità date fossero nove, undici ec. Tutto ciò s' intenderà meglio verificando gli esempj che seguono.

190. *Esempio* I. — Sono stati fatti 132 metri di fossa da 30 uomini in giorni 18, quanti ne farebbero 54 uomini in 28 giorni?

Qui le quantità omogenee fra loro sono 30 uomini e 54 uomini; 18 giorni e 28 giorni; la quantità solitaria sono i 132 metri, a cui corrisponde la quantità, che si cerca. Incomincio dunque dal fare la prima regola del tre dicendo: se 30 uomini fanno 132 metri, quanti ne faranno 54? e come la regola è visibilmente diretta, trovo 237 $\frac{3}{5}$, che è il lavoro che 54 uomini faranno in 18 giorni. Passo alla seconda regola del tre, e dico: se in 18 giorni si fanno metri 237 e $\frac{3}{5}$ di fossa, quante se ne faranno in 28? E qui pure la regola essendo diretta trovo metri 369 e $\frac{3}{5}$= metri 369,60 che è il lavoro, che faranno 54 uomini in 28 giorni.

Esempio II. — Se 40 uomini lavorando per 3 giorni, a ragione di 5 ore per giorno, hanno fatto uno scasso di terreno di metri quadri 330; quanti ne avrebbero fatti 25 uomini in 10 giorni, se avessero lavorato per 8 ore del giorno?

Comincio dalla prima regola del tre, e dico: se 40 uo-

mini hanno scassati mq. 330, quanti ne scasseranno 25 uomini? e la regola essendo diretta, trovo mq. 206,25 che è il lavoro che faranno 25 uomini in 3 giorni, lavorando a ragione di 5 ore il giorno. Passo alla seconda regola del tre, e dico: se in 3 giorni si fanno mq. 206,25 di lavoro, quanto se ne farà in 10 giorni? E perchè la regola è parimente diretta trovo mq. 687,50 che è il lavoro che faranno 25 uomini in 10 giorni a ragione di 5 ore al giorno. Faccio quindi la terza proporzione dicendo; se a ragione di 5 ore al giorno di lavoro fanno mq. 687,50 di scasso, a ragione di 8 ore al giorno quanti se ne faranno? E come qui pure si tratta di regola diretta, avrò mq. 1100 lavoro di 25 uomini in 10 giorni a ragione di 8 ore al giorno.

Esempio III. — Cavalli 6 in giorni 25 hanno consumato Ettolitri 9,25 di biada; dandone una eguale misura a 18 cavalli, per quanti giorni basteranno loro El. 33,30?

Comincio da dire: se El. 9,25 di biada sono stati consumati in 25 giorni; El. 33,30 in quanti giorni saranno consumati? regola che essendo diretta, dà per risultamento giorni 90. Passo quindi alla seconda regola del tre, e dico; se 6 cavalli consumerebbero la suddetta biada in giorni 90, in quanti giorni la consumeranno 18? caso di regola inversa, che porta alla seguente proporzione (184), $6:18::x:90$, ovvero (178) $18:6::90:x$; e avremo $x=\frac{6\times90}{18}=30$, che è il numero dei giorni cercato.

Esempio IV. — Un soldato marciando 6 ore per giorno, ha consumato 30 giorni per fare 230 Chilometri; se avesse corso con la medesima velocità per 10 ore del giorno, in quanti giorni avrebbe fatto 600 Cm.?

Comincio da dire: se Cm. 230 si fanno in 30 giorni, in quanti giorni se ne fanno 600? qui la regola è diretta; e fatta la proporzione $230:30::600:x$ si trova $x=78\frac{6}{23}$ numero dei giorni in cui viaggiando a ragione di 6 ore per giorno si faranno Cm. 600. Passo all'altra regola dicendo:

se viaggiando ore 6 per giorno si fanno Cm. 600 in giorni $78\frac{6}{23}$, viaggiando 10 ore del giorno in quanti giorni si faranno? Qui la regola è inversa, giacchè crescendo le ore del cammino, scemano i giorni del viaggio; perciò imposterò la proporzione nel modo seguente; $6:10::x:78\frac{6}{23}$ oppure $10:6::78\frac{6}{23}:x$ e troveremo 46 giorni, 22 ore, 57 minuti e $\frac{9}{23}$.

191. I quesiti di regola del tre composta si possono risolvere ancora senza passare per più regole del tre semplici; il che si ottiene con formare una proporzione, di cui gli antecedenti sieno respettivamente il prodotto degli antecedenti delle due o più regole del tre separate, che si debbono fare col metodo che abbiamo prescritto. Così nel primo esempio della regola diretta, si avrebbe la proporzione $30\times18:54\times28::132:x=369\frac{3}{5}$.

Si avverta però che volendo fare uso di questo metodo, quando vi sono regole inverse, dovremo, rapporto a queste, supporle impostate colla seconda delle due accennate maniere, cioè con l'omogeneo con l'interrogazione in principio, col solitario in terzo luogo e col termine incognito in fondo.

Per tal via nel 1.° esempio della regola inversa si avrebbe $9{,}25\times18:33{,}30\times6::25:x$ ed $x=30$.

192. Ecco come si dispone il calcolo per giungere più presto alla proporzione ultima o *proporzione composta.* Abbiasi l'Esempio II. del paragrafo antecedente. Traduco prima di tutto il quesito come appresso:

Uomini	Giorni	Metri	Ore
40	3	330	5
25	10	x	8

confronto quindi la colonna dove è l'incognita x con ciascuna dell'altre, e formo secondo la regola data (187) altrettante proporzioni le quali pongo l'una sotto l'altra, limitandomi a scrivere una volta sola gli ultimi due termini. Colla prima colonna si avrà $40:25::330:x$; colla se-

conda $3:10::330:x$, finalmente colla quarta $5:8::330:x$ e secondo quel che è stato detto scrivo:

$$\left.\begin{array}{r} 40:25 \\ 3:10 \\ 5:\ 8 \end{array}\right\} ::330:x$$

moltiplicando poi tra loro gli antecedenti 40, 3 e 5 ed i conseguenti 25, 10 e 8 si avrà la proporzione ultima o composta

$$40\times3\times5:25\times10\times8::330:x=1100.$$

Si prenda ora l'*esempio* IV. — Traduco

Cm. 230	Giorni 30	Ore 6
600	x	10

moltiplico mettendo prima in proporzione come sopra, ed osservando che la 2.ª è inversa, ed ottengo

$$\left.\begin{array}{r} 230:600 \\ 10:\ \ 6 \end{array}\right\} ::30:x$$

$$230\times10:600\times6::30:x=46.\ 22.\ 57\ \tfrac{9}{23}$$

Si sciolgano i seguenti quesiti per esercizio.

1.° In 18 giorni 60 uomini hanno fatto metri 750 di lavoro; quanti metri ne faranno uomini 72 in giorni 12? Risp. Ne faranno M. 600.

2.° Un muro lungo metri 120, alto metri 4,5 è stato costruito da un dato numero di persone in giorni 15; si domanda in quanti giorni verrà costruito dalle medesime un altro muro lungo metri 130, alto metri 5? Risp. In giorni 18 $\frac{1}{18}$.

3.° Quanti mattoni si richiederanno per fare il pavimento di una sala lunga metri 20,40, larga M. 12,50, se per un'altra lunga M. 15,20 larga 10,15 si sono impiegati mattoni 3857? Risp. Vi vorranno mattoni 6375.

4.° Lampade 20 da 3 lumi per ciascuna in 10 mesi consumano 75 miriagrammi d'olio; in quanto tempo consumeranno lo stesso olio lampade 19 da 4 lumi? Risp. Lo consumeranno in mesi 9, giorni 11, ore 6.

DELLA REGOLA DI SEMPLICE E DOPPIA FALSA POSIZIONE.

La regola di *falsa posizione* serve a trovare un numero incognito per mezzo di uno o due numeri supposti. Quando si suppone un sol numero, la regola si chiama di *semplice falsa posizione;* quando se ne suppongono due, la regola si dice di *doppia falsa posizione.*

DELLA SEMPLICE FALSA POSIZIONE.

193. La regola di semplice falsa posizione consiste in tre operazioni, cioè 1.° *nel prendere un numero arbitrario, che sembri adattato a sciogliere la questione, e si chiama Posizione;* 2.° *nell'esaminare se quel numero soddisf*[illegible]*ia a tutti i dati della questione; e qualora non so*[illegible]*, e dia un resultamento falso, in tal caso* 3.° *si forma* [illegible] *proporzione in questa guisa: il risultamento falso* [illegible] *numero falsamente supposto, come il resultamento* [illegible] *al numero vero, che si cerca.*[1] Gli esempi re[illegible] chiara la regola.

194. *Esempio* I. — Un Aritmetico fu interrogato [illegible] la sua età, ed egli così rispose: se si sommi il ter[illegible] miei anni col loro quarto si avrà 14. Quanti anni aveva?

Suppongo che ne avesse 12: ma $\frac{12}{3}+\frac{12}{4}=7$; dunque la supposizione è falsa essendo falso il resultamento 7. Perciò formo la proporzione così $7 : 12 :: 14 : x=24$, che è [illegible]mero che si cerca. Infatti $\frac{24}{3}+\frac{24}{4}=14$.

[1] Questa regola è fondata sul supposto, che il numero che si cerca sia proporzionale al risultamento, di modo che crescendo o scemando questo debba crescere o scemare ancora quello. E come questa ipotesi non ha luogo in tutti i quesiti, così la semplice falsa posizione non è sempre adoprabile. I casi in cui non lo è, saranno facilmente scoperti dal risultamento, che allora non corrisponderà alle condizioni. Perciò tutte le volte, che si mette in uso questa regola non deve mancarsi di sperimentare sul risultamento ottenuto le condizioni del quesito.

Esempio II. — Un padre lascia a tre suoi figli in contanti L. 1000 con questa condizione, che il maggiore abbia il doppio del secondo, e questi il triplo del terzo. Quanto tocca a ciascuno?

Suppongo che il maggiore abbia L. 60, dunque in quest'ipotesi il secondo ne avrà 30, ed il terzo 10. Queste parti sommate insieme non fanno che L. 100, e dovrebbero fare 1000, se la distribuzione fosse la vera. Dunque è falso il numero delle L. 60, che si è supposto per il maggiore. Perciò ecco la proporzione: $100 : 60 :: 1000 : x = 600$ parte del maggiore. Sarà dunque 300 la parte del secondo, 100 quella del terzo: e queste porzioni corrispondono esattamente alla condizione; infatti $600 + 300 + 100 = 1000$.

[illegible]sempio III. — Vi sono in un molino quattro macine. L[illegible] prim[illegible] in un'ora macina 6 ettolitri di grano, la seconda [illegible]cina 4, la terza 3 e la quarta 2. In quanto tempo si macin[illegible]rebbero El. 450 da tutte insieme?

[illegible]ongo che le suddette macine in 6 ore macinino [illegible]. In tal supposto la prima macinerebbe El. 36, [illegible]a El. 24, la terza El. 18, la quarta El. 12. Ora [illegible]ati insieme gli ettolitri macinati nel tempo supposto, [illegible] 90; ma dovevano dare El. 450, dunque la supposizione del tempo è falsa. Si faccia perciò la proporzione: se per macinare El. 90 si richiedono 6 ore, per macinarne 450 quante ore si richiederanno? Si troverà 30 per vero n[illegible]o.

[illegible]atti in ore 30 macinerà la prima El. 180, la seconda El. 120, la terza El. 90, la quarta El. 60, che in tutte fanno appunto El. 450.

Esempio IV. — Tre mercanti A, B, C, sopra vari generi di mercanzie comprate in società scapitarono L. 720, e vogliono ripartirsi lo scapito in proporzione dei loro capitali. Il capitale di A sta a quello di B come 3 a 4; quello di B sta a quello di C come 5 a 6. Qual sarà lo scapito di ciascuno?

Suppongo 30 lo scapito di A. Siccome gli scapiti debbono essere in ragione dei capitali, chiamato y lo scapito di B avremo $30 : y :: 3 : 4$, e sarà $y=40$; e chiamato z lo scapito di C avremo $40 : z :: 5 : 6$, e sarà $z=48$. I tre scapiti sommati insieme saranno dunque 118. Dovrebbero esser 720; dunque

$$118 : 720 :: 30 : x = 183\ ^{3}/_{59} \text{ scapito vero di A}$$
$$:: 40 : y = 244\ ^{4}/_{59} \text{ scapito vero di B}$$
$$:: 48 : z = 292\ ^{52}/_{59} \text{ scapito vero di C}$$

Somma 720

Ecco alcuni quesiti di semplice falsa Posizione:

I. Un padre ha il quintuplo dell'età del suo figlio, e la somma delle loro età è 54. Qual è l'età di ciascuno? *Risp.* Anni 45 è l'età del padre, e 9 anni quella del figlio.

II. Interrogato Pietro quante lire avesse perdute al giuoco in un giorno, rispose così: il loro terzo, il quarto e il quinto sommati fanno 94. Quante ne perse? *Risp.* L. 120.

III. Più terremoti abbatterono in un giorno la metà delle case di una piccola città, nel giorno dopo un terzo, e un dodicesimo negli altri giorni, di modo che ne restarono in piedi soltanto 63. Quante erano le case della città? *Risp.* Erano 756.

IV. Un corpo di soldati assalito improvvisamente dal nemico fu interamente disfatto; poichè un terzo rimase morto sul campo, un quarto fu fatto prigioniero e 1000 di essi si dettero alla fuga. Quanti erano i soldati? *Risp.* Erano 2400.

V. Quanto tempo ci vorrebbe a votare una Botte aprendo ad un tempo stesso quattro cannelle; la prima delle quali la voterebbe da sè in due ore, la seconda in 3, la terza in 5, la quarta in 6? *Risp.* La voterebbero in 50 minuti.

VI. Per premio da distribuirsi ad un Sergente, ad un Colonnello e ad un Generale, che si distinsero nell'assalto di una fortezza, furono destinate L. 704. Con questa somma

si coniarono tre medaglie d'oro. Quella che fu data al Colonnello costava il quadruplo di quella del Sergente. Il Generale l'ebbe di un valore doppio della somma dei prezzi dell'altre due, con più un terzo della medesima somma. Di qual prezzo era ciascuna? *Risp.* La medaglia del Sergente era di L. 42,24; del Colonnello di L. 168,96; del Generale L. 492,80.

DELLA REGOLA DI DOPPIA FALSA POSIZIONE.

195. Nella regola *di doppia falsa posizione* si suppongono due numeri, come si è detto di sopra, senza di che non possono risolversi molti quesiti, e specialmente quelli che contengono qualche numero determinato, il quale deve valutarsi insieme col supposto. Ogni quesito per altro, che si scioglie con una sola supposizione, si scioglie sicuramente con due. Eccovi il metodo.

196. Primieramente si *suppone un numero,* e con questo si opera secondo le condizioni del quesito, e se vi sodisfa, il quesito è sciolto. Non sodisfacendovi si nota l'errore, cioè l'eccesso o il difetto del resultamento venuto, rapporto a quello che doveva venire, e si fa precedere dal segno positivo + se l'errore è in eccesso, dal segno negativo — se è in difetto. Secondariamente *si suppone un altro numero maggiore o minore del primo*, e si applica similmente alla questione proposta, e se non la risolva, se ne nota egualmente col suo segno corrispondente l'errore. In terzo luogo si *moltiplica il primo numero supposto per l'errore dell'altro; ed il secondo numero supposto per l'errore del primo, e quindi se gli errori sono ambedue o positivi o negativi,* si divide la differenza dei prodotti per la differenza degli errori: *se un errore è negativo e l'altro positivo*, si divide la somma dei prodotti per la somma degli errori. Nell'uno e nell'altro caso il quoziente è ordinariamente il numero cercato. Applichiamo il metodo allo scioglimento dei seguenti quesiti.

197. *Esempio* I. — Ho comprata una carrozza, un calesse e tre cavalli; ho pagato il calesse Napoleoni[1] 40 meno de'cavalli, la carrozza Napoleoni 50 più del calesse e dei cavalli, e ho spesi in tutto Napoleoni 450: quanti ne ho spesi in ciascuna cosa?

1.ª *Posizione.* — Supposto che i cavalli sieno costati Napoleoni 100, il calesse che vale 40 Napoleoni meno, sarebbe costato Napoleoni 60, e la carrozza, che vale 50 Napoleoni più che non costarono i cavalli e il calesse insieme, sarebbe stata pagata 210. Questi prezzi sommati danno Napoleoni 370, e debbono darne 450; dunque ho un errore in meno di 80.

2.ª *Posizione.* — Supposto che i cavalli mi costino Napoleoni 130, il calesse mi costerà 90, e la carrozza 270; sommo come sopra ed ho Napoleoni 490; ma dovevano essere 450; dunque ho un errore in più di 40.

Posizione I.	100	Posizione II.	130
Errore —	80	Errore +	40

Moltiplico adesso la prima posizione 100 per il secondo errore 40, ed ho 4000: moltiplico parimente la seconda posizione 130 per il primo errore 80, ed ho 10400: e poichè gli errori sono di diverso segno, divido la somma di questi prodotti, che è 14400 per quella degli errori che è 120, ed ho per prezzo dei cavalli Napoleoni 120, per quello del calesse Napoleoni 80, e per quello della carrozza Napoleoni 250. Ed infatti questi tre prezzi sommati insieme danno appunto Napoleoni 450.

Esempio II. — Che anni abbiamo, domanda un figlio al padre? questi risponde: la vostra età è attualmente il terzo della mia, e sei anni indietro non era che il quarto. Qual è l'età di ciascuno?

Si supponga che il padre abbia 60 anni, il figlio ne avrà 20, e sei anni indietro il padre ne avrà avuti 54, ed

[1] La pezza d'oro da 20 lire si suol chiamare *Napoleone* o *Marengo*.

il figlio 14. Ma siccome il figlio doveva avere allora il quarto degli anni del padre, e 14×4 supera di 2 gli anni 54 del padre, perciò l'errore è + 2. Supposto in secondo luogo che il padre attualmente abbia 30 anni, fatto un simile raziocinio si trova l'errore — 8: onde

Posizione I. 60	Posizione II. 30
Errore + 2	Errore — 8

Avendo i due errori un segno differente, divido la somma dei due prodotti 60×8, e 30×2 per 10, somma degli errori, ed ho per quoziente 54, che è l'età del padre, e perciò 18 anni è l'età del figlio. Sei anni addietro il padre avrà dunque avuti 48 anni, e il figlio 12; e come dodici è il quarto di 48, così si verifica che allora il figlio avesse il quarto dell'età del padre.

Esempio III. — Si domanda di dividere il 25 in due parti tali che la più grande contenga 49 volte la più piccola.

Si supponga che la parte minore sia 2; dunque la maggiore sarebbe 23: ora se il numero 2 fosse il vero dovrebbe entrare 49 volte in 24, ed in conseguenza dovrebbe ottenersi il prodotto 23 dalla moltiplicazione di 2 per 49; ma si ha invece il prodotto 98; dunque l'errore è + 75. Supposto poi 1 per la parte minore, la maggiore sarebbe 24: ma $1 \times 49 = 49$, dunque l'altro errore è + 25. Perciò

Posizione I. 2	Posizione II. 1
Errore + 75	Errore + 25

Fatte le solite moltiplicazioni, e divisa, perchè gli errori hanno il medesimo segno, la differenza dei prodotti per la differenza degli errori, si trova per quoziente $^1/_2$, che è la parte minore, onde la maggiore sarà $24\ ^1/_2$. Infatti $24\ ^1/_2 : {}^1/_2 = 49$.

Esempio IV. — Pietro e Giovanni perderono al giuoco. La metà delle loro perdite insieme fa 36 scudi,[1] e la dif-

[1] Dicesi *scudo* la pezza d' argento da 5 Lire.

ferenza tra la metà della perdita di Pietro ed il sesto della perdita di Giovanni è 4. Qual fu la perdita di ciascuno?

Suppongo che Pietro perdesse Scudi 20; Giovanni avrebbe perduti Scudi 52, perchè le loro metà debbono fare 36. In questo caso la differenza tra la metà della perdita di Pietro, ed il sesto di quella di Giovanni sarebbe $1\ ^1/_3$. Ma poichè deve essere 4; trovo perciò il primo errore — $2\ ^2/_3$. Suppongo in secondo luogo che la perdita di Pietro sia stata di Scudi 18, e ripetuto il medesimo raziocinio trovo l'altro errore — 4; onde

Posizione I.	20	Posizione II.	18
Errore —	$2\ ^2/_3$	Errore —	4

divido la differenza dei prodotti trovati per la differenza degli errori secondo il metodo esposto, ed ho per quoziente 24. Dunque Pietro perdè Scudi 24, ed in conseguenza Giovanni perdè Scudi 48. Infatti $\frac{24}{2}+\frac{48}{2}=36$, e $\frac{24}{2}-\frac{48}{6}=4$.[1]

Si sciolgano i seguenti quesiti.

[1] L'esposta regola è fondata su questo principio, che gli errori dei resultamenti sono proporzionali agli errori delle posizioni, cioè, che debba tanto più o meno crescere la differenza fra il resultamento falso ed il vero, quanto è più o meno grande quella del numero supposto e del numero vero. Ciò premesso, applicando questo principio al primo esempio, osserveremo che la prima posizione avendo dato un resultamento minor del giusto, e la seconda avendone dato un maggiore, e chiamato x il numero vero, saranno $x-100$, $130-x$ le differenze fra esso e le due posizioni. Ma queste differenze si suppongono proporzionali agli errori. dunque $x-100 : 130-x :: 80 : 40$; quindi $40x-4000=10400-80x$, e (169 nota 1. 2.°) $40x+80x=10400+4000$, ossia $120x=14400$, ed (*ivi* 3.°) $x=\frac{14400}{120}=120$.

Nel 3.° esempio ove gli errori sono ambedue positivi, e perciò le due posizioni son false in eccesso cioè maggiori del numero vero, sarà $2-x : 1-x :: 75 : 25$, e quindi $50-25x=75-75x$; e (*ivi* 2.°) $75x-25x=75-50$; ossia $50x=25$, ed $x=^{25}/_{50}=^1/_2$.

I. Sonò un orologio, e mi fu domandato che ora fosse. Io risposi così: $^2/_3$ dell'ore sonate sono appunto $^4/_7$ dell'ore che soneranno. Che ora era? *Risp.* Erano le ore 6.

II. Un operaio si è impiegato per 60 giorni a condizione che gli fossero dati 15 soldi[1] ogni giorno che lavorasse, e che egli darebbe 5 soldi ogni giorno che non lavorasse. Dopo 60 giorni egli ricevè L. 24. Quanti giorni lavorò? *Risp.* Lavorò per 39 giorni.

III. Pietro aveva la quarta parte dei denari di Giovanni, quando si pose a giocare. Pietro sestuplicò il suo denaro; ed a Giovanni dopo aver perdute 6 lire rimase la metà del denaro, che aveva Pietro dopo il giuoco. Indovinate il denaro che aveva ciascuno di essi in principio? *Risp.* Pietro aveva Lire 6 e Giovanni Lire 24.

IV. Un Generale vorrebbe disporre dei soldati in battaglione quadrato: ma nel suo primo disegno avanzano 124 uomini, e se aggiunge un uomo ad ogni fila ne mancano 129. Quanta era la truppa? *Risp.* Era di 16000 uomini.

V. Comprai del panno a ragione di Scudi 7 per cinque metri, e lo rivendetti a ragione di Scudi 11 per metri sette. Guadagnai in tutto Scudi 100. Quanti metri ne comprai? *Risp.* Ne comprai metri 583 $^1/_3$.

VI. Ho due borse A, B con dei denari. Se passassi $^2/_3$ del denaro, che contiene la borsa A, nella borsa B, sarebbero allora in questa Lire 29; e se al contrario dalla borsa B levassi $^3/_4$ del denaro, che vi era, e gli ponessi nella borsa A, vi sarebbero pure in questa Lire 29. Quante lire sono in ciascuna borsa? *Risp.* Nella borsa A sono L. 14,50 e nella borsa B L. 19,33.

REGOLA D'INTERESSE SEMPLICE E COMPOSTO.

198. La regola d'interesse è un'operazione per mezzo della quale si conosce la somma dovuta per una quantità

[1] Dicesi *soldo* la ventesima parte d'una lira, cioè il pezzo da 5 centesimi.

di denaro data a frutto o ad interesse con certe condizioni. Una tal regola è d'*interesse semplice*, se si cerca quanto di guadagno produce una data somma, con la condizione che restando nelle mani del debitore il capitale ed il frutto per un tempo determinato, egli non sia tenuto a pagare che l'interesse del capitale; oppure d'*interesse composto,* se abbia per oggetto di fissare il frutto non solo del capitale, ma ancora dei frutti dello stesso capitale. La prima si chiama ancora *merito semplice;* l'altra *frutto di frutto,* oppure *merito di merito a capo d'anno.* L'una e l'altra sono fondate sopra la regola del tre, di cui non sono che applicazioni per lo più semplicissime.

Incominciamo dalla regola *d'interesse semplice* presa in tutti gli aspetti, di cui la pratica si apprenderà facilmente dai seguenti esempi.[1]

199. *Esempio* I. — Lire 2580 poste al cambio al 5 per $^0/_0$ quanto frutteranno in un anno?

Dico: se il capitale 100 frutta in un anno Lire 5, quanto frutterà nel tempo stesso il capitale 2580? ed ho la proporzione

[1] Fatto F il Frutto annuo d' un Capitale C messo all' Interesse I per $^0/_0$ si avrà

$$100 : I :: C : F$$

e siccome tanto è tenere a frutto il Capitale C per T anni, quanto T volte il Capitale C per un anno, la prima proporzione si converte in proporzione generale nel modo seguente

$$100 : I :: C\times T : F.$$

Da questa espressione si rileva che

1.° il frutto $F=\frac{I\times C\times T}{100}$ 3.° il tempo $T=\frac{F\times100}{I\times C}$

2.° la tassa $I=\frac{F\times100}{C\times T}$ 4.° il Capitale $C=\frac{F\times100}{T\times I}$.

Se per resultato finale cercasi tutto in una somma Capitale e Frutto si usa l' altra formula

$$5.^\circ\ C+F=\frac{C(100+T\times I)}{100}.$$

$$100 : 5 :: 2580 : x$$

Moltiplicati al solito i due medi e diviso il prodotto per l'estremo 100, si avrà $x=129,00$ che è il frutto annuo delle 2580 lire.

Esempio II. — Pietro paga annualmente di canone, per un censo al 4 per %, lire 250 e 75 centesimi, e vorrebbe affrancarlo; quanto dovrebbe sborsare di capitale?

È evidente che se Lire 4 provengono da un capitale di 100 lire, debbono Lire 250,75 derivare da un capitale proporzionalmente maggiore, e potrà dirsi: se 4 Lire vengono da 100, da quante verranno lire 250,75? Quindi la proporzione sarà:

$$4 : 100 :: 250,75 : x$$

Donde si avrà $x=6268,75$ capitale cercato.

Esempio III. — Si pagano da un mercante annualmente di frutto semplice Lire 595 per la somma di Lire 8500 presa a cambio. Quanto paga per 100?

È chiaro che dovendo le lire 100 fruttare in proporzione delle 8500, avremo

$$8500 : 595 :: 100 : x=7$$

frutto di un centinaio.

Esempio IV. — Un usuraio ha dato a cambio al 12 per % Scudi 15600, ed ha convenuto di non prendere che dopo 5 anni il frutto semplice ed il capitale. Qual somma gli sarà dovuta?

Si cerchi primieramente il frutto annuo del capitale come nel primo esempio, e si troveranno Scudi 1872: questi moltiplicati per 5 anni danno Scudi 9360. Si aggiungano al capitale, e si avranno Scudi 24960, somma dovuta al[illegible]io dopo 5 anni.

Posso risolvere questo quesito anche così: moltiplico la tassa 5 per 12 numero degli anni, e il prodotto 60 l'unisco a 100: moltiplico il resultato pel capitale 15600 e lo divido per 100. Il quoziente $\frac{15600 \times 160}{100}=24960$ sarà ciò che si cerca.

Esempio V. — Pietro in 6 anni ha riscosso tra frutti e capitale la somma di Lire 450, ed il frutto era al 4 per %. Qual era il suo capitale?

In questo e negli altri simili casi terrete costantemente questa regola: moltiplicate per il tempo o numero degli anni il frutto annuo, aggiungete cento al prodotto, e per quel che viene dividete la somma riscossa moltiplicata per 100: così vi risulterà il capitale. Nel nostro caso il frutto annuo essendo 4, e il tempo 6, sarà 124 il prodotto dell'uno nell'altro accresciuto di 100; e poichè la somma sborsata è 450, sarà il capitale cercato $x=\frac{450\times100}{124}=\frac{11250}{31}=$ Lire 362,90.[1]

Esempio VI. — Furono dati a cambio Scudi 12400, e dopo 6 anni tra frutti e capitale furono riscossi Scudi 15376: quanto era il frutto?

Sottraete dalla somma riscossa il capitale, moltiplicate la differenza per 100; dividete il prodotto per il capitale moltiplicato nel tempo, e avrete il frutto cercato. Nel nostro caso il capitale è 12400, la differenza fra questo e la somma riscossa è 2976, il tempo è 6: dunque $x=\frac{2976\times100}{12400\times6}=4$, frutto cercato.[2]

Esempio VII. — Se avessi dato a cambio al 4 per %

[1] Ritorniamo al quesito; e applicando i principj della semplice falsa posizione poniamo che il capitale cercato fosse 100. In 6 anni avrebbe fruttato 24, e Pietro avrebbe in tutto riscosso 124. Se riscosse 450, ciò spiega che il capitale non era 100, ma tante volte più grande quante il 450 è più grande di 124. Avremo dunque la proporzione 124 : 450 : : 100 : x, e come sopra $x=\frac{4500\times100}{124}$, di qui la regola.

[2] Se il capitale era 12400, la somma riscossa 15376, è chiaro che il semplice frutto sarà stato 2976, ed è evidente che questo frutto deve stare al capitale 12400, come il frutto cercato di 100 a 100. Quindi la proporzione 2976 : 12400 : : x : 100, donde $x=\frac{297600}{12400}=24$ frutto di scudi 100 in 6 anni; quindi in un anno sarà di scudi 4.

Lire 12400, e dopo alcuni anni avessi riscosso Lire 15376 tra frutti semplici e capitale, per quanto tempo avrei tenuto a cambio il mio capitale?

Sottraete dalla somma riscossa il capitale, moltiplicate la differenza per 100, dividete il prodotto per il capitale moltiplicato nel frutto di un centinaio, ed avrete 15376—12400=2976, onde $x=\frac{2976\times100}{12400\times4}=\frac{2976}{496}=6$, tempo cercato.[1]

200. Passiamo alla regola d'*interesse composto*, e vediamone la pratica nei seguenti esempi.

Esempio I. — Giovanni dette a frutto e rifrutto del 5 per $^0/_0$ la somma di Lire 40000, e la tenne a quest'interesse per 4 anni. Qual fu il frutto di ciascun anno?

Per la soluzione dei quesiti di simil sorte, si fanno tante regole del tre, quanti sono gli anni. I termini della prima ragione sono sempre il 100, e il numero esprimente il suo frutto; il terzo termine nel primo anno è il capitale semplice, nel secondo anno è il capitale aumentato del frutto dell'anno indietro, e così negli anni successivi; e il quarto è il frutto cercato di ciascun anno: onde in questo caso abbiamo

$$100 : 5 :: \begin{cases} 40000 : x=2000, \text{ frutto del 1.° anno} \\ 42000 : x=2100, \text{ frutto del 2.° anno} \\ 44100 : x=2205, \text{ frutto del 3.° anno} \\ 46305 : x=2315{,}25 \text{ frutto del 4.° anno} \end{cases}$$

E la somma di tutti questi frutti che sale a L. 8620,25, unita alle L. 40000 di capitale, fa 48620,25 totale dovuta a Giovanni dopo i quattro anni. Ma negli esempi che se-

[1] È questa una regola del 5: e per risolverla dovrà dirsi in primo luogo: se il capitale 100 frutta 4 in un anno, il capitale 12400 frutterà x, che si troverà eguale a $\frac{12400\times4}{100}$. E in secondo luogo se $\frac{12400\times4}{100}$ è il frutto di 1 anno, il frutto 2976, differenza fra il capitale impiegato e la somma riscossa di quanti anni sarà? e troveremo per questi anni $\frac{2976\times100}{12400\times4}=6$.

guono si fisseranno dei modi più compendiosi per la soluzione di simili quesiti.

Esempio II. — Un mercante prese ad interesse composto Lire 500 al 10 per °/₀ da un usuraio, e nel corso di 3 anni nulla sborsò. Quanto dunque deve all' usuraio fra capitale e frutti?

È evidente che Lire 100 divengono alla fine del primo anno 110, onde dico: se 100 divengono 110, quanto diverranno 500? e trovo 550: per il secondo anno ripeto, se 100 danno 110, quanto daranno 550? e trovo 605: finalmente se 100 danno 110, quanto daranno 605? e trovo che il denaro del mercante alla fine del terzo anno è Lire 665,50.

Osservazione. — È tale il metodo che si tiene comunemente in Aritmetica per trovare la somma, a cui ascenderanno i frutti e il capitale posto a frutto e rifrutto per un dato tempo. Essendo ancor questo molto laborioso, quando si tratti che gli anni sieno molti, si può fare uso di altri metodi più spediti, come si vedrà in seguito.

Esempio III. — Furono impiegate a frutto e rifrutto del 5 per °/₀ Lire 1000 per 4 anni. Quanto fu riscosso tra capitale e frutti dopo un tal tempo?

Ecco la regola generale: 1.° *si trovi qual diviene un'unità al termine di un anno al frutto fissato;* 2.° *si alzi la quantità trovata alla potenza equivalente al numero degli anni nei quali il danaro sta a frutto;* 3.° *si moltiplichi questa potenza per il capitale, e si avrà la quantità cercata.*

Dico dunque: se 100 diviene dopo un anno 105, che diverrà 1? e si troverà 1,05. Sarà dunque la somma cercata $x = 1000 \times 1{,}05^4 = 1000 \times 1{,}21550625 = 1215{,}50625 =$ Lire 1215,51 circa.[1]

[1] Se 100 Lire divengono in capo ad un anno 105, uno scudo diverrà $\frac{105}{100} = 1{,}05$, e questo è chiaro. Ora se 1 lira in un anno divien 1,05,

Osservazione I. — Siccome a forma dell'esposta regola generale, moltiplicando il capitale impiegato a frutto e rifrutto, per la potenza di un'unità col suo frutto e rifrutto si trova qual esso divenga dopo un corso di anni; così per facilitare e rendere più brevi simili operazioni daremo al fine di questo trattato una tavola, la quale contiene fino alla ventesima inclusivamente tutte le potenze di un'unità col suo frutto di 1, di 1 $^1/_4$, 1 $^1/_2$, 1 $^3/_4$, 2 ec., e finalmente di 10 $^3/_4$ per cento con otto decimali, numero più che sufficiente per avvicinarsi al vero resultamento senza un errore sensibile. Per mezzo pertanto di questa tavola con una semplice moltiplicazione si rinviene qual diventi un

Lire 1,05 diverranno nel secondo anno per le regole del tre $1,05 \times 1,05 = 1,05^2$; e se Lire 1,05 son divenute nel secondo anno $1,05^2$, Lire $1,05^2$ diverranno nel terzo anno $\frac{1,05^2 \times 1,05^2}{1,05} = \frac{1,05^4}{1,05} = 1,05^3$ (155 e 156). Ed egualmente si troverà che nel quarto anno diverranno $1,05^4$. Tutto questo sarebbe dunque il provento di una lira di capitale: ora se il capitale non è 1 ma 1000, anche il provento finale dovrà esser mille volte più grande, e quindi si avrà moltiplicando $1,54^4$ per 1000.

Per ottenere poi una espressione generale supponiamo che C sia il capitale, R il fruttato annuo di una lira e T gli anni in cui il detto capitale è tenuto a frutto e rifrutto. Il capitale C alla fine del primo anno diverrà $C(1+R)$, perchè se $1 : 1+R :: C : x = C(1+R)$: alla fine del secondo anno diverrà $C(1+R)^2$, come si ha dalla proporzione $1 : 1+R :: C(1+R) : x = C(1+R) \times (1+R) = C(1+R)^2$. Per la stessa ragione alla fin di tre, di quattro.... di T anni la somma sarà respettivamente $C(1+R)^3$, $C(1+R)^4$.... $C(1+R)^T$. E quindi chiamato S il resultato finale l'espressione cercata sarà

$$1.^0 \quad S = C(1+R)^T$$

Da questa derivano gli altri valori del capitale C e della tassa divisa per 100 ossia di R:

$$2.^0 \quad C = \frac{S}{(1+R)^T}; \quad 3.^0 \quad R = -1 + \sqrt[T]{\frac{S}{C}}.$$

Giovandosi dei logaritmi (vedi la terza parte) si otterrà anche il valore del tempo T che è dato dalla formula

$$4.^0 \quad T = \frac{LS - LC}{L(1+R)}.$$

capitale coi suoi frutti per un corso di anni non maggiore di 20, limite della tavola, impiegato ad interesse composto; e con una divisione si trova qual sia il capitale che posto a frutto e rifrutto ha prodotto una data somma. La soluzione di questo quesito inverso contiene pure la regola per lo sconto composto, o a capo d'anno, di cui parleremo in seguito.

Eccovi l'uso della tavola per il quesito diretto. Sia il capitale di Lire 1000, come nell'esempio III, impiegato a frutto composto del 5 per 100 per 4 anni. Qual diverrà dopo un tal tempo?

Cerco nella tavola la colonna delle potenze di 1 col suo frutto di 5 per 100. Trovo che per l'anno quarto corrisponde a 1,21550625; e dico: se 1 col suo frutto in quattro anni diviene 1,21550625, che diverrà 1000? onde $x=1,21550625 \times 1000=1215,50625$, come si era trovato di sopra.

Osservazione II. — Se il denaro stia a frutto per *anni* e *mesi*, per gli anni intieri si pratichi come nell'antecedente esempio III, e si ricorra alle solite regole del tre per trovare l'aumento che riceve il denaro nei dati mesi, riducendo questi in frazioni decimali d'anno.

Esempio IV. — Qual somma diverranno Lire 1000 al termine di anni 4 e mesi 6, impiegate a frutto e rifrutto del 5 per 100?

Nei 4 anni il capitale, come si è veduto di sopra, diviene 1215,50625: ora dico, se Lire 100 in 12 mesi fruttano Lire 5, quanto frutteranno 1215,50625 in 6 mesi? cioè

$$100 \times 12 : 5 :: 1215,50625 \times 6 : x=$$

e schisando (§ 186) $100 \times 2 : 5 :: 1215,50625 : x= 200 : 5 :: 1215,50625 : x=$L. 30,38765; questa quantità si unisce a quella già trovata per gli anni interi, e si ha L. 1245,89 per la somma cercata.

Se oltre agli anni e mesi vi siano dei giorni, si riducano i mesi a giorni, e quindi si dica: Se 100 in 360 giorni mi rendono 5, quanto mi renderà nel determinato

numero di giorni la somma trovata per gli anni interi?

Esempio V. — Si domanda qual somma diverranno al termine di anni 4, mesi 6 e giorni 20 L. 1000 impiegate a frutto e rifrutto del 5 per %?

Si è veduto nei passati esempi che le L. 1000 divengono in 4 anni 1215,50625; e come mesi 6 sono giorni 180 (§ 114), quindi mesi 6 e giorni 20 sono giorni 200, dirò

Se $100\times360 : 5 :: 1215{,}50625\times200 : x$ schisando e riducendo al solito $72 : 1 :: 1215{,}50625\times2 : x=36 : 1 :: 1215{,}50625 : x=33{,}76406$, la qual quantità sommata con quella dovuta agli anni interi rende $x=$L. 1249,27.[1]

Esempio VI. — Fu data ad interesse composto di 5 per % per 2 anni una somma di Lire, che produsse tra frutti e capitale L. 551,25. Qual fu il capitale?

Questo quesito è inverso dei precedenti. Per trovare il capitale si divide la somma data per l'unità del denaro, aumentata del suo frutto annuo, e quindi alzata alla potenza corrispondente al numero degli anni. Nell'esempio dato il frutto annuo di una lira equivale a $^5/_{100}$, perciò una lira più il suo frutto sarà 1,05; onde essendo 2 gli anni dati, avremo

$$x=551\,^1/_4 : 1{,}05^2=\frac{2205}{4} : 1{,}1025=\text{L. } 500,$$ capitale richiesto.[2]

[1] Poichè i frutti del denaro in realtà non meritano alcun frutto se non dopo compito l'anno, negli ultimi due esempi ho considerato come semplice l'interesse, che devesi al denaro per i mesi e giorni, e per tale viene pure considerato da molti Aritmetici. Questo metodo è vantaggioso alla persona che ha dato il suo denaro ad interesse; ma avverto che l'anticipazione esigerebbe uno sconto in favore di chi ha preso il denaro per quel tempo, che manca al compimento dell'anno, sconto ordinariamente trascurabile. Questo per altro sarebbe giusto nel nostro caso per ambedue le parti, di valutare in proporzione dell'interesse annuo il frutto di ciascun rotto d'anno, e di dare l'aumento proporzionale al frutto di tempo in tempo.

[2] Questa regola è manifesta dopo quanto abbiamo stabilito per il problema diretto. Infatti, se la somma a cui giunge il capitale impiegato

Esempio VII. — Pietro ha promesso che dopo 4 anni, 5 mesi e 6 giorni, darà a Caio sua figlia in sposa, alla quale ha per quel tempo assegnata una dote di Sc. 3450. Perciò vorrebbe oggi impiegare a frutto composto del 6 per $^0/_0$ una tal somma, che in capo a quel termine tra capitale e frutti si riducesse eguale alla dote promessa. Qual deve esser questa somma?

Qui oltre gli anni completi abbiamo un corso di mesi e giorni, duranti i quali, il frutto che decorre non può, nè deve riguardarsi come composto, ma come semplice; per la ragione che nell'impiego ad interesse composto i frutti non entrano in capitale se non alla loro scadenza, cioè ad anno finito, onde prima che l'anno termini, non è fruttifero che il solo capitale, o per meglio dire, ciò che il capitale coi frutti precedenti era divenuto al principio dell'anno. Perciò il quesito attuale riguarda in parte l'interesse semplice e in parte l'interesse composto: per risolverlo dovremo regolarci così. Si cominci dal cercare quale sarebbe la somma, che impiegata al frutto semplice del 6 per $^0/_0$ in 5 mesi e 6 giorni, cioè in 5 mesi e $^1/_5$, ovvero in $^{13}/_{30}$ d'anno, renderebbe tra sorte e frutti i voluti Sc. 3450. Per trovare questa somma applico la regola data all'esempio V. del frutto semplice, cioè moltiplico il frutto 6 per il tempo $^{13}/_{30}$, ed ho $^{13}/_5$, ovvero 2,6. Aggiungo 100 ed ho 102,6, per cui diviso 345000, prodotto degli Scudi 3450×100, ho per la somma cercata Sc. 3362,573. Dopo ciò si cerchi il capitale, che impiegato al frutto composto del 6 per $^0/_0$ in quattro anni completi rende la trovata somma di Sc. 3362,573. Questo facilmente lo avremo con la regola del quesito precedente, cioè dividendo 3362,573 per $1,06^4$, ossia secondo la solita tavola per 1,26247696 ed avremo in quoziente Sc. 2663,463 che sarà la somma

si ha moltiplicando questo capitale per l'unità più il suo frutto, elevata al numero corrispondente agli anni d'impiego, è chiaro che dividendo per questa la somma ottenuta si tornerà ad avere il capitale.

finale cercata da Pietro. Questa infatti, siccome può facilmente verificarsi per riprova, impiegata alle condizioni che sopra salirà nei 4 primi anni completi a Sc. 3362,573. E poichè quest'ultima somma impiegata a frutto semplice per il restante del tempo, cioè per mesi 5 e giorni 6, sale, come abbiamo veduto, a Sc. 3450, è dunque evidente che Pietro impiegando fino d'oggi gli Sc. 2663,463, si troverà dopo anni 4, mesi 5 e giorni 6 con la somma voluta degli Sc. 3450, totale della dote promessa alla figlia.

Osservazione I. — Questo stesso quesito può anche assai speditamente risolversi con la regola di semplice falsa posizione. Sia 1000 il capitale richiesto, in 4 anni all'impiego composto del 6 per $^0/_0$, secondo il prescritto di sopra, diverrà eguale a $1000 \times 1{,}06^4 = 1000 \times 1{,}26247696 = 1262{,}47696$. Or poichè questa somma deve tuttavia restare in impiego a frutto semplice per 5 mesi e 6 giorni, ossia $^{13}/_{30}$ d'anno, moltiplicherò come sopra $^{13}/_{30}$ per il frutto 6, aggiungerò 100 al prodotto, e avrò al solito 102,6, per cui moltiplicherò 1262,47696; e diviso il prodotto per 100 avrò Sc. 1295,301 risultamento che proverrebbe dal supposto capitale 1000 impiegato al 6 per $^0/_0$ per anni 4, mesi 5 e giorni 6. Ma dovrei avere Sc. 3450; dunque il capitale supposto è minore del vero, e per trovare il vero imposterò una proporzione, dicendo: se Sc. 1295,301 vengono da Sc. 1000, da che verranno Sc. 3450? e troverò da Sc. 2663,47 =Sc. 2663, L. 2 e 35 centesimi capitale cercato.

II. Quelli che tra gli aritmetici non conoscono le regole da noi date, sì per l'interesse semplice, che per il composto, sciolgono questo genere di quesiti per la stessa via di falsa posizione, operando per altro nella maniera che segue:

Capitale supposto	Sc.	1000,000
Suoi frutti in un anno al 6 per $^0/_0$ . . .	»	60,000
Capitale fruttifero a capo del 2.° anno . .	»	1060,000

Capitale fruttifero al 2.° anno riportato . .	Sc.	1060,000
Suoi frutti al termine del 2.° anno . . .	»	63,600
Capitale fruttifero a capo del 3.° anno . .	»	1123,600
Suoi frutti al termine del 3.° anno	»	67,416
Capitale fruttifero a capo del 4.° anno . . .	»	1191,016
Suoi frutti al termine del 4.° anno	»	71,461
Capitale fruttifero al termine del 4.° anno .	»	1262,477
Suoi frutti di mesi 5 e giorni 6	»	32,824
Somma totale proveniente dal capitale 1000.	Sc.	1295,301

E quindi fatta la proporzione si otterrà il resultato nei soliti Sc. 2663,47.

Avvertimenti.

I. Lasciamo il metodo per trovare il frutto annuo di un capitale dato a frutto e rifrutto, per trattarne in seguito, allorchè avremo parlato dell'estrazione di qualunque radice col mezzo dei Logaritmi.

II. Lasciamo pure di assegnare il metodo pratico per trovare il tempo, in cui un capitale ha prodotto con i suoi frutti e rifrutti una data somma, perchè suppone egualmente la teoria dei Logaritmi, dei quali parleremo a suo luogo.

Si sciolgano per esercizio i seguenti esempi:

I. Un mercante impiega Lire 20000 per 6 anni a frutto e rifrutto del 5 per %: qual sarà la somma totale dopo un tal tempo? Rispondo, sarà Lire 26801,91.

II. Lire 5784 in mesi 27 al frutto semplice del 5 per %, qual frutto daranno? Rispondo, daranno Lire 650,70.

III. Dopo 5 anni fu riscossa tra capitali e frutti semplici d'8 per % la somma di Lire 21840; qual era il fondo? Rispondo, era di L. 15600.

IV. Dopo 3 anni, per una somma data ad interesse composto del 9 per % furono riscosse Lire 103602,32 tra sorte e frutti; qual era il capitale? Rispondo, era di L. 80000.

DELLO SCONTO, E PRIMIERAMENTE DELLO SCONTO SEMPLICE.

201. L'anticipazione dei pagamenti portando un vantaggio talvolta assai considerabile al creditore, ed uno scapito al debitore, conviene che questi sia rindennizzato, e allorchè si offre di saldare il suo debito, prima della scadenza, sborsi una somma minore di quanto avrebbe dovuto dare, dopo trascorso il tempo accordatogli al pagamento. La somma, la quale viene condonata al debitore che paga anticipatamente, si chiama *sconto*; e questo si fissa ad un tanto per °/₀, secondo il frutto che l'uso o la convenzione accorda al danaro impiegato.

Ora perchè nè l'una nè l'altra parte risenta pregiudizio in questo contratto, la somma anticipata dal debitore solvente, dovrà evidentemente essere tale, che impiegata al frutto convenuto per tutto il tempo, che tuttora mancherebbe al pagamento, possa dopo quel termine ridursi eguale all'intera somma dovuta, e sulla quale si abbuona lo sconto. In tal caso queste ricerche apparterranno ai quesiti inversi d'interesse, non riducendosi ad altro che a trovare un capitale, il quale impiegato a frutto o semplice o composto, giunga in un dato tempo ad eguagliare una somma data.

Quindi le regole e le pratiche insegnate per la soluzione di quei quesiti ai §§ 199 e 200 servono anche per i quesiti di sconto; e perciò se lo sconto sia semplice, o sia, se si supponga che la somma sborsata non s' impieghi che a frutto semplice, dovremo *per il numero degli anni, di cui s'anticipa il pagamento, moltiplicare il tanto per °/₀, a cui si abbuona lo sconto, aumentare di 100 il prodotto, e per il resultato divider la somma totale dovuta, moltiplicata prima per* 100 (§ 199. Es.). Se poi lo sconto sia composto, ossia se la somma, che si vuole sborsare si valuti come da impiegarsi al frutto composto, dovremo *divider la somma dovuta per l'unità aumentata del suo frutto*,

o sconto annuo, ed elevata col mezzo della Tavola III. ad una potenza eguale al numero degli anni, che tuttora mancherebbero al pagamento. Nel caso poi che lo sconto sia per anni, mesi e giorni, dovremo usare le pratiche date nel citato paragrafo 200.

Si venga dunque agli esempi, e cominciamo in primo luogo dallo sconto semplice.

202. *Esempio* I. — A deve a B Scudi 15600 dopo 5 anni, ed è pronto a restituirglieli subito, se gli venga accordato lo sconto semplice del 12 per $^0/_0$. Ne conviene B; qual somma dovrà A sborsare nell'atto?

Qui gli anni anticipati essendo 5, e lo sconto abbonandosi al 12 per $^0/_0$, sarà 60 il prodotto di quelli in questo, che aumentato di 100 diverrà 160, perciò la somma da pagarsi nell'atto, secondo la data regola, sarà $x=\frac{15600\times100}{160}=$Sc. 9750.

Esempio II. — Pietro deve aver da Giovanni L. 6100 dopo mesi 5; e si accorda di saldare al presente con lo sconto semplice del 4 per $^0/_0$ l'anno. Quanto dunque dovrà Giovanni dare a Pietro?

Qui il tempo dell'anticipazione non va che a $^5/_{12}$ d'anno, e questi, moltiplicati per le quattro lire di sconto, danno $\frac{20}{12}=1\ ^2/_3$; aggiungo 100 ed ho $101\ \frac{2}{3}=\frac{305}{3}$, per cui diviso il prodotto di 100 in 6100, ho poi la somma cercata $x=610000:\frac{305}{3}=\frac{1830000}{305}=6000$.

Esempio III. — Sono creditore di Lire 600, che mi devono essere pagate dopo 25 giorni, Le ricevo oggi con lo sconto semplice di L. 6 per $^0/_0$. Quanto riscuoto?

Giorni 25 sono $^5/_6$ del mese e perciò $^5/_{72}$ di anno. Moltiplico per lo sconto 6 ed aggiungendo 100 viene $\frac{1205}{12}$. Avremo dunque per la somma richiesta $x=600\times100:\frac{1205}{12}=\frac{720000}{1205}=$L. 597,51.

Esempio IV. — Sono dovute ad un mercante dopo 3 anni, 4 mesi e 20 giorni Lire 4500; con quanto potrebbe essere soddisfatto dal debitore se fosse pagato oggi con lo sconto del 5 per % l'anno?

Riduco il tempo in anni e frazione di anno (§ 131) ed ho anni 3 $^{7}/_{18}$ ossia $^{61}/_{18}$; moltiplico per 5, aggiungo 100, e quindi operando come sopra, ho per il valore cercato L. 3847,98.

Osservazione. — Lo sconto con cui sono stati calcolati i quesiti precedenti prende il nome disconto *all'indentro* o *razionale* per distinguerlo da un'altra specie di sconto usato in commercio e comunemente detto sconto *all'infuori* o *commerciale,* che consiste nel puro interesse semplice della somma da scontarsi. Per trovare quindi ciò che rimane dopo lo sconto una somma proposta, basta diminuirla del fruttato che essa dà, posta ad un interesse eguale allo sconto concesso, e per un tempo eguale a quello di cui si anticipa il pagamento.

In pratica poi per ottenere direttamente il resultato finale dovremo *per il numero degli anni di cui si anticipa il pagamento moltiplicare il tanto per % a cui si abbuona lo sconto in fuori, togliere da 100 il prodotto e dividere per 100 un tal resultato moltiplicato prima pel capitale.*[1]

Esempio. — Quanto dovrò pagare attualmente per estinguere un debito di Lire 1500 esigibile solo tra 15 mesi, essendomi ora concesso lo sconto in fuori del 4 per %?

Riduco il tempo ad anni e frazione di anno ed ho anni

[1] Infatti posto C il capitale da scontarsi, S lo sconto per %, T il tempo ed R la somma già scontata diremo, se 100 resta 100—S, C sarà diminuito proporzionalmente, e quindi

$$100 : 100-S :: C : x.$$

E siccome lo sconto in 2, 3, 4... T anni diviene 2S, 3S, 4S.... TS, la detta proporzione si trasforma nell'altra più generale

$$100 : 100-T\times S :: C : R;$$

per cui

$$R = \frac{C\times(100-T\times S)}{100}.$$

1,25; lo moltiplico per lo sconto 4 e il prodotto $1,25 \times 4 = 5$ lo tolgo da 100: l'avanzo 95 moltiplicato pel capitale 1500, ossia 142500 diviso per 100, dà 1425 somma cercata.

Si risolvano per esercizio i seguenti esempi:

I. Giovanni dovendo pagare tra 6 anni la somma di Lire 15376, chiede di saldare adesso il suo debito, purchè gli sia accordato lo sconto semplice del 4 per $^0/_0$: qual somma dunque dovrà pagare? Risp. Dovrà pagare L. 12400.

II. Un creditore mi chiede L. 5508,30, che dovrei pagargli dopo 9 anni e 3 mesi, e mi offre lo sconto semplice del 6 $^1/_2$ per $^0/_0$ l'anno, qualora lo saldi oggi. Accetto il patto; quanto gli dovrò dare? Risp. L. 3440.

III. Sopra scudi 840 $\frac{22}{25}$, che si debbono pagare dopo mesi 6 e giorni 18, si accorda lo sconto semplice di centesimi 2 $^2/_5$ per lira il mese, qualora si paghi nell'istante. Qual sarà la somma da pagarsi? Rispondo che sarà Sc. 700.

IV. Si vuol riscuotere subito una cambiale di lire 718 pagabile fra 18 mesi; quanto si dovrà riscuotere calcolando lo sconto in fuori al 6 per 100? Rispondo L. 653,38.

203. Passiamo adesso agli esempi di sconto composto.

Esempio I. — Antonio deve pagare a Giovanni L. 350 al termine di anni 4; Giovanni accorda ad Antonio, qualora saldi oggi il suo debito, il 5 per $^0/_0$ di sconto a capo d'anno; con quale somma salderà Antonio il suo debito?

L'anticipazione essendo qui di 4 anni completi, e lo sconto valutandosi al 5 per $^0/_0$, sarà dunque $1,05^4$ il divisore che dovremo dare alla somma totale dovuta 350. Perciò la somma da sborsarsi nell'atto sarà $\frac{350}{1,05^4} = \frac{350}{1,21550625}$ $=$ L. 287,96, e tanto Antonio pagherà a Giovanni per saldo del suo debito.

E volendo tenere la pratica più comune, diremo: se 105 si salda con 100, con quanto si salderà 350? trovo L. 333 $^1/_3$: ripeto, se 105 si salda con 100, con quanto si

salderà 333 $^{1}/_{3}$? Trovo L. 317 $^{29}/_{63}$. Ripeto l'operazione servendomi sempre dei medesimi due primi termini, e ponendo per terzo termine della proporzione il valore trovato nell'operazione antecedente, e ciò replico tante volte, quanti sono gli anni. Il valore di x, che si ha nell'ultima operazione è quello che si cerca.

Esempio II. — Si vuole anticipare per 6 anni e mesi 5 il pagamento di L. 6100, se si accorda lo sconto del 4 per $^{0}/_{0}$ a capo d'anno. Quanto si deve sborsare nell'atto?

Qui il tempo non si riduce a soli anni completi, ma si estende inoltre anche a 5 mesi. Perciò, secondo la regola già data per simil caso nell'interesse composto; sconterò la somma data per questi soli 5 mesi, ossia per 5 dodicesimi d'anno, ed avrò, secondo il solito, x=6000. In questa somma applicherò la regola data per lo sconto composto nel caso degli anni completi, dividendola cioè per $1{,}04^{6}=1{,}26531902$, ed avrò per la somma cercata $x=\frac{6000}{1{,}265319}$ L. 4741,96 che debbono pagarsi nel momento.

Esempio III. — Un mercante ha dato delle mercanzie a Pietro per il valore di L. 1732,59 col patto che gli siano pagate dopo 2 anni, 5 mesi e 18 giorni: ma se Pietro lo salda nell'istante, gli accorda lo sconto del 6 per $^{0}/_{0}$ a capo d'anno. Accetta Pietro la proposizione. Quanto deve sborsare?

Mesi 5 e giorni 18 sono mesi 5,6 cioè $^{7}/_{15}$ d'anno; moltiplicati questi per il frutto 6, ed aggiunto 100 al prodotto, si ha 102,8 per cui divise le lire date si ottiene 1685,40, sulle quali cercato lo sconto composto per i due anni completi, si ottiene per la somma richiesta L. 1500.

DEI CONTI SCALARI.

204. Hanno luogo i conti scalari, allorquando sopra di un capitale si fanno dei pagamenti a conto in diversi tempi, e si cerca quanto rimanga a pagarsi per saldo, e si chia-

mano *scalari*, perchè di grado in grado da questi risulta la successiva diminuzione del debito.

Questi conti sono di due specie 1.° *di merito semplice;* 2.° *di merito doppio.*

Sono di merito semplice, quando non si esigono gli interessi che nel pagamento finale, e le somme che ricevonsi a conto si mettono tutte ad estinzione del capitale.

Sono di merito doppio, quando si esigono gli interessi di anno in anno, e le somme che si ricevono a conto, si mettono prima ad estinzione degl'interessi, e ciò che avanza si mette ad estinzione del capitale.

205. Nei quesiti scalari di merito semplice

1.° S'imposta il capitale in una colonna a destra, si cerca il suo interesse, secondo il precetto dato (§ 199, Es. IV), del frutto semplice fino al giorno del primo pagamento, e questo interesse si nota in una colonna a sinistra.

2.° Il pagamento si scrive nella colonna destra sotto il capitale, e se ne fa la sottrazione notandovi il residuo.

3.° Si cerca l'interesse di questo capitale residuo fino al giorno del secondo pagamento, e notato questo interesse nella colonna sinistra, si nota nella destra il 2.° pagamento, e si sottra dal capitale rimasto; e così si prosegue per gli altri pagamenti successivi.

In fine si fa la somma di tutti gli interessi decorsi, questa si aggiunge all'ultimo residuo del capitale, e allora si ha quanto debba pagarsi per saldo. Vediamone un esempio.

Ai 10 Dicembre 1866 A dette a B L. 2400 al 5 per % l'anno, ed ha ricevuto a conto di capitale i seguenti pagamenti:

Il 1867 25 Giugno L. 450
1869 12 Aprile » 640

Domando di quanto sia ancora debitore B fra capitali e interesse il 18 Maggio 1877?

Capitale dato a frutto il 10 Decembre 1866		L. 2400,00
Interessi decorsi fino al 25 Giugno 1867, che sono mesi 6 e giorni 15	L. 65,00	
Ai 25 Giugno 1867 pagate		» 450,00
Restano		» 1950,00
Interessi del capitale residuo fino al 12 Aprile 1869, che sono anni 1, mesi 9 e giorni 17	» 175,23	
Ai 12 Aprile 1869 pagate		» 640,00
Restano		» 1310,00
Interessi del capitale residuo fino al 18 Maggio 1877, che sono anni 8, mesi 1 e giorni 6	» 530,55	
B deve per interessi .	L. 770,78	» 770,78
Deve dunque fra capitale e interessi.		L. 2080,78

206. Nei conti scalari di merito doppio, intestato come sopra il capitale nella colonna destra, si opererà come appresso:

1.° Si cerchino gl'interessi fino al giorno del primo pagamento, e si notino nella colonna sinistra.

2.° Sotto gl'interessi della stessa colonna sinistra si scriva il primo pagamento, e se ne faccia la sottrazione, e se il pagamento supera gl'interessi decorsi, si scriva sulla colonna destra sotto il capitale, e se ne faccia la sottra-

zione per averne il capitale residuo. Se poi il pagamento fatto è minore degl'interessi decorsi, quello che manca si lascia nella colonna sinistra per riunirlo agl'interessi successivi.

3.° Si cerchino gl'interessi del capitale residuo fino al giorno del secondo pagamento, e si operi come sopra finchè non si sia ottenuto l'ultimo resto. Se ne veda la pratica nel seguente esempio.

A ebbe in imprestito da B, ai 20 di Novembre 1863 un capitale di L. 2500 al 6 per %, e fece in più tempi i seguenti pagamenti a conto d'interesse e capitale:

Il 1865	10 Febbrajo . .	L.	640
1867	20 Maggio . .	»	200
1869	12 Aprile . . .	»	300

Si domanda di quanto A sia ancor debitore il dì 17 Maggio 1870?

Capitale avuto a frutto il 20 Novembre 1863			L.	2500,00
Interessi del medesimo ai 10 Febbraio 1865, che sono anni 1, mesi 2 e giorni 20 . . .	L.	183,33		
Ai 10 Febbraio 1865 paga	»	640,00		
A conto di capitale .	L.	456,67	»	456,67
Resta il capitale			L.	2043,33
Interessi del capitale residuo fino al 20 Maggio 1867 che sono anni 2, mesi 3 e giorni 10	L.	279,25		
Ai 20 Maggio 1867 paga	»	200,00		
Resto d'interessi . .	»	79,25		

	Interessi	Capitale
Resto d'interessi riportato	L. 79,25	
Interessi dello stesso capitale ai 12 Aprile 1869, che sono anni 1, mesi 10 e giorni 22	» 232,26	
Somma d'interessi . .	» 311,51	
Resto di capitale riportato		L. 2043,33
A dì 12 Aprile 1869 paga	» 300,00	
Resto d'interessi . .	» 11,51	
Interessi del capitale medesimo fino al 17 Maggio 1870, che sono anni 1, mesi 1 e giorni 5	L. 134,52	
Somma d'interessi . .	» 146,03	L. 146,03
A dovrà tra interessi e capitale		L. 2189,36

Osservazione I. — Per quanto il caso contemplato nella regola e nell'esempio precedente sia qualificato dall'uso come di merito doppio, è per altro manifesto che dovrebbe piuttosto riguardarsi come di merito semplice. Infatti quel tanto di frutti, che eccede i pagamenti fatti, non si fa entrare in aumento del capitale, siccome a rigore dovrebbe farsi, se veramente il merito fosse composto (§ 200).

Osservazione II. — Se accade che i pagamenti fatti a conto superino il capitale e gl'interessi, in questo caso risulterà di quanto il creditore abbia a rimborsare il debitore.

Osservazione III. — Può accadere ancora che fatti dei pagamenti a conto in diversi tempi, abbia il debitore rice-

vuti altri capitali al medesimo o a diverso interesse. In questi casi s'incomincia a operare dal capitale più antico, e i pagamenti, detratti gli interessi, si mettono di mano in mano a sconto del medesimo, finchè sia estinto. Dopo questo s'imposta il secondo capitale, e se dall'ultimo pagamento rimane qualche avanzo, questo si mette a conto del nuovo capitale, e così si prosegue sino alla fine.

Osservazione IV. — Allorquando si arrivi ad un capitale che sia a maggiore interesse del precedente, si deve questo col capitale residuo ridurre con la regola degli adequati, della quale parleremo in appresso, ad un sol capitale e ad un solo interesse, e proseguire l'operazione con ambedue unitamente.

DEI PAGAMENTI FATTI A CONTO COLL'ASSEGNAMENTO DI UN'ANNUA SOMMA.

207. In più maniere può assegnarsi un'annua somma per l'estinzione di un capitale, del quale uno sia debitore ad un altro; vale a dire o con obbligarsi a pagare realmente d'anno in anno la quantità convenuta, o col fissare per essa una cartella di banco o del debito pubblico, un livello, il fitto di un podere o la pigione di una casa ec.

I. Se i pagamenti, che si fanno a conto per mezzo di un'annua somma debbono andare tutti ad estinzione del semplice capitale, si opera allora come nell'esempio a pag. 183, notando d'anno in anno la somma assegnata e sottraendola dal capitale.

II. Se i pagamenti debbono andare prima in estinzione d'interesse e poi del capitale, si opera come nell'esempio a pag. 186, notando d'anno in anno la somma assegnata, e sottraendo prima da questa gli interessi, poi mettendo il residuo a sconto del capitale.

208. Eccone frattanto un esempio, da cui pure si apprenderà una seconda maniera, con la quale si possono fare i conti scalari, alcun poco diversa da quella già data (§ 204),

e che consiste nel sommare di mano in mano gl'interessi col capitale e sottrarne i pagamenti.

Esempio. — A ebbe in prestito da B un capitale di L. 6500 al 5 per % l'anno, e gli assegnò per estinzione d'interesse e di capitale l'annua somma di L. 1600; domando dopo 3 anni di quanto A gli sia ancora debitore?

Capitale al 5 per %	L.	6500,00
Interesse del 1.° anno	»	325,00
Somma	L.	6825,00
Pagasi l'annua somma di	»	1600,00
Restano	L.	5225,00
Interessi del 2.° anno	»	261,25
Somma	L.	5486,25
Pagasi l'annua somma di	»	1600,00
Restano	L.	3886,25
Interessi del 3.° anno	»	194,31
Somma	L.	4080,56
Pagasi l'annua somma di	»	1600,00
Restano	L.	2480,56

Al termine dunque di 3 anni il debito sarà ridotto a L. 2480,56.

209. *Osservazione* I. — Se la somma da pagarsi di anno in anno fosse invece di sei in sei mesi, di quattro in quattro ec., la regola per trovare il debito residuo sarà sempre la stessa.

Osservazione II. — Se il debito totale voglia estinguersi a rate eguali e pagabili in un dato numero d'anni, e si debba determinare il valore di queste rate, opereremo come nel quesito seguente.

Esempio. — Paolo ha dato a cambio a Giovanni al 5 per % L. 12000, con patto che nel termine di anni 3 resti estinto detto capitale unitamente ai suoi frutti pagandogli

annualmente un'egual rata; domando qual sarà l'annua somma, che dovrà pagare Giovanni per estinguere capitale e frutti?

Per risolver questo quesito s'impieghi il dato capitale di L. 12000 al frutto fissato; quindi applicando le regole della doppia falsa posizione si supponga in primo luogo, che la somma annua per estinguere capitale e frutti sia L. 3500, e si operi come appresso:

Capitale dato a frutto	L.	12000,00
Suo frutto	»	600,00
Capitale e frutti	L.	12600,00
Paga per 1.ª rata supposta	»	3500,00
Resto di capitale	L.	9100,00
Suo frutto	»	455,00
Capitale e frutti	L.	9555,00
Paga per 2.ª rata supposta	»	3500,00
Resto di capitale	L.	6055,00
Suo frutto	»	302,75
Capitale e frutti	L.	6357,75
Paga per 3.ª rata supposta	»	3500,00
Errore in meno	L.	2857,75

Si supponga per 2.° che l'annua somma, con la quale potremo estinguere frutti e capitale sia di L. 3800, e operando come segue diremo:

Capitale dato a frutto	L.	12000
Suo frutto	»	600
Capitale e frutti	L.	12600
Paga per 1.ª rata supposta	»	3800
Resto di capitale	L.	8800

Resto di capitale riportato	L.	8800
Suo frutto	»	440
Capitale e frutti	L.	9240
Paga per 2.ª rata supposta	»	3800
Resto di capitale	L.	5440
Suo frutto	»	272
Capitale e frutti	L.	5712
Paga per 3.ª rata supposta	»	3800
Errore in meno	L.	1912

1.ª Posizione 3500 — 2.ª Posizione 3800
1.º Errore — 2857,75 — 2.º Errore — 1912

Ed operando secondo il precetto dato al paragrafo 197, si troverà che Giovanni dovrà pagare l'annua somma di L. 4406,50 e con questa estinguerà frutti e capitale; il che si verificherà come appresso:

Capitale dato a frutto	L.	12000,00
Suo frutto	»	600,00
Capitale e frutti	L.	12600,00
Paga per 1.º rata	»	4406,50
Resto di capitale	L.	8193,50
Suo frutto	»	409,68
Capitale e frutti	L.	8603,17
Paga per 2.ª rata	»	4406,50
Restò di capitale	L.	4196,67
Suo frutto	»	209,83
Capitale e frutti	L.	4406,50
Paga per 3.ª rata	»	4406,50

E verificata così l'operazione, resta rassicurato, che la somma, che dovrà pagare Giovanni a Paolo annualmente, sarà L. 4406,50 con la quale salderà nel modo fissato il suo debito.

210. Proponiamo qui un altro esempio che riguarda un caso non infrequente.

Giovanni ha dato in prestito ad Antonio L. 1600 senza interesse, con patto però che Antonio debba restituirgli questa somma in 4 anni con lo sborso di L. 400 all'anno, e ritardando alcuno dei pagamenti, debba su questo correre l'interesse del 5 per %. Passano i 4 anni senza che Antonio abbia fatto alcun pagamento. Domando quanto dovrà alla fine tra capitale e interessi?

In questo quesito le L. 400, che dovevano pagarsi dopo il primo anno, vengono ritardate di 3 anni; quelle, che si dovevano pagare dopo il secondo, sono ritardate di 2 anni; e quelle dopo il terzo anno sono ritardate di un anno. Dopo il quarto anno non abbiamo alcun ritardo, perchè si suppone spirato il tempo del pagamento.

Perciò le L. 400 fruttano

Per il 1.° anno	L.	20,00
Per il 2.° anno	»	40,00
Per il 3.° anno	»	60,00
Somma degli interessi	L.	120,00
Si aggiunga il capitale imprestato	»	1600,00
Dunque l'intiero debito sarà di	L.	1720,00

DEI QUESITI D'ANNUALITÀ SOLUBILI CON LE REGOLE DI SCONTO.

211. Spesso i pagamenti da eseguirsi in futuro sono fissati a rate da pagarsi di tempo in tempo. Pagando anticipatamente una qualche rata o il tutto, si accorda lo sconto solito. Se si anticipi una sola rata, si ricade nei passati esempi dello sconto semplice (§ 202), o in quelli di sconto composto (§ 203). Se anticipatamente si saldi tutto il debito, vi sono varj casi da osservarsi.

PRIMO CASO PER I PAGAMENTI A RATE EGUALI ALLA FINE D'OGNI ANNO.

Esempio I. — A affitta a B un podere per tre anni a L. 6600 l'anno, e per avere gli affitti anticipati, gli accorda lo sconto di Lire 10 per %; domando qual somma pagherà B?

Venendo B ad anticipare di un anno l'affitto dell'anno primo, di 2 anni quello del secondo, di 3 quello del terzo, così viene a godere sopra il primo affitto lo sconto di un anno, di due sul secondo, di tre sul terzo.

Ora lo sconto del primo anno si avrà dicendo (§ 202):

L. 110 : 100 : : 6600 : x= . . . . L. 6000,00

Lo sconto di 2 anni si avrà dicendo:

» 120 : 100 : : 6600 : x= . . . . » 5500,00

Lo sconto di 3 anni si avrà dicendo:

» 130 : 100 : : 6600 : x= . . . . » 5076,92

Somma totale . . . . L. 16576,92

Dunque B dovrà pagare ad A per saldo Lire 16576,92.

212. Volendo applicare lo sconto composto al dato quesito, e volendo trovare con qual somma B salderebbe anticipatamente le tre annate d'affitto, si potrebbe fare uso di uno dei seguenti due metodi.

Metodo I. — Si aggiunga lo sconto 10 al 100, e ne risulta 110. Poi per la regola del tre ripetuta tante volte quanti sono gli anni si dica:

Se 110 dà 100, oppure se 11 dà 10, quanto 6600? si trova . . . . L. 6000,00

Di nuovo se 11 dà 10, quanto 6000? si trova . . . . » 5454,55

Finalmente se 11 dà 10, quanto 5454,55? si trova . . . . » 4958,68

Fatta la somma dei tre resultamenti si avrà . . . . L. 16413.23

Onde B dovrà pagare ad A per saldo mediante lo sconto composto del 10 per °/₀ L. 16413,23.

Metodo II. — Siccome pagandosi anticipatamente una somma che dovrebbe pagarsi in più anni a rate eguali ogni anno, la prima rata ha lo sconto di un anno, la seconda di due, la terza di tre; così ogni rata forma un quesito a parte, e con la regola del tre si trova con qual somma si saldi oggi per ciascuna rata, e le somme poi particolari riunite in una somma sola salderanno anticipatamente tutto il debito.

Servendomi della Tavola sul frutto del 10 per °/₀, applico questo metodo al suddetto esempio, e dico: se 1,10 in un anno torna 1, che torneranno L. 6600? ho L. 6000. Se 1,21 dopo due anni torna 1, che torneranno L. 6600? ho L. 5454,55. Finalmente se 1,331 dopo tre anni torna 1, che L. 6600? ho L. 4958,68. Sommo i tre resultamenti, e trovo essere eguali a quelli del 1.° metodo nella somma di L. 16413,23.

Esempio II. — A paga a B un livello annuo di L. 315: questi per avere anticipatamente i livelli di anni 3 $^1/_2$, gli accorda lo sconto del 5 per °/₀; domando quanto dovrà B ricevere da A?

Il livello del primo anno viene anticipato di un anno, quello del secondo di 2 anni, quello del terzo di 3 anni, quello del mezzo anno di 4 anni, poichè A non è tenuto a pagare questo mezzo livello se non al termine del 4.° anno unitamente all'altra metà.

Per lo sconto adunque del 1.° anno, dirò:

Se 105 : 100 : : 315 : x= . . . . L. 300,00
Per lo sconto del 2.° anno, dirò:
Se 110 : 100 : : 315 : x= . . . . » 286,36
Per lo sconto del 3.° anno, dirò:
Se 115 : 100 : : 315 : x= . . . . » 273,91

Somma per i 3 anni . . . . L. 859,97

Riporto . . . . L. 859,97
Per lo sconto del mezzo livello del 4.° anno, dirò:
Se 120 : 100 : : 157,5 : $x=$ . . . . » 131,25
Somma totale . . . L. 994,52

213. *Osservazione.* — Se fosse A obbligato a pagare questo livello per soli anni 3 $^1/_2$, e B ne richiedesse l'anticipazione, o se si trattasse di una casa, che A avesse preso a pigione per anni 3 $^1/_2$ col patto di pagare L. 315 per il primo anno, altrettante per il secondo e terzo, e L. 157,50 per la metà del quarto anno, lo sconto dell'anticipazione si farebbe come appresso.

Esempio III. — A prende a pigione una casa per anni 3 $^1/_2$ a ragione di L. 315 all'anno: il padrone per aver la pigione anticipata gli accorda lo sconto del 5 per $^0/_0$; domando quanto dovrà il padrone ricevere?

Per lo sconto del primo anno si avrà come sopra
105 : 100 : : 315 : $x=$ . . . . L. 300,00
Per il secondo anno
110 : 100 : : 315 : $x=$ . . . . » 286,36
Per il terzo anno
115 : 100 : : 315 : $x=$ . . . . » 273,91
Per la metà del quarto anno, l'anticipazione avendosi di anni 3 $^1/_2$, si dirà:
117,5 : 100 : : 157,5 : $x=$ . . . . » 134,04
Somma . . . . L. 994,31

Esempio IV. — Antonio prende in affitto da Paolo una fattoria per anni 4 a L. 16400 in tutto, con l'obbligo di pagare L. 4000 dopo il primo anno, altrettante dopo il secondo e dopo il terzo, e L. 4400 dopo il quarto. Fatto il contratto, Paolo propone ad Antonio l'anticipazione di tutto l'affitto, accordandogli lo sconto del 7 per $^0/_0$. Si domanda quanto dovrà ritirare?

Qui Antonio viene ad anticipare di un anno il primo

pagamento delle L. 4000, di due il secondo, di tre il terzo e di quattro il quarto.

Per il 1.° anno adunque si dirà:
107 : 100 : : 4000 : x= . . . . L. 3738,32
Per il 2.° anno
114 : 100 : : 4000 : x= . . . . » 3508,77
Per il 3.° anno
121 : 100 : : 4000 : x= . . . . » 3305,78
Per il 4.° anno
128 : 100 : : 4400 : x= . . . . » 3437,50

Somma da pagarsi da Antonio . . . . L. 13990,37

Osservazione. — La soluzione di questo ultimo quesito può applicarsi a tutti i casi, nei quali si tratti di trovare lo sconto da farsi per l'anticipazione di più capitali dovuti a diversi tempi.

DEI RAGGUAGLI D'INTERESSE E DI TEMPO.

214. Allorchè uno trovasi creditore o debitore di più capitali posti a diverso interesse, spesse volte gli occorre per maggiore semplicità ridurli tutti ad un solo interesse, in modo però che la somma dei capitali messa a frutto con l'interesse comune, renda ogni anno lo stesso frutto totale, che prima rendevano i diversi capitali con i loro respettivi interessi: e ciò dicesi *ragguaglio d'interesse.*

Può ancora accadere, che essendo uno creditore o debitore di più capitali da doversi pagare in tempi diversi, voglia fissare un solo tempo, al termine del quale, senza pregiudizio d'ambedue le parti, si debba fare il pagamento di tutti insieme; e ciò chiamasi *ragguaglio di tempo.*

Questi ragguagli possono essere semplici o composti: sono *semplici* quando si tratta del solo interesse o del solo tempo; sono *composti* se comprendono l'uno e l'altro. Vediamo il modo pratico di risolvere le questioni spettanti a questi due casi.

RAGGUAGLI SEMPLICI D' INTERESSE.

215. Se si avranno vari capitali posti a diverso interesse, si ridurranno ad un solo interesse 1.° moltiplicando ogni capitale per il suo interesse, 2.° dividendo la somma dei prodotti per la somma dei capitali, ed il quoziente sarà l'interesse cercato.

Esempio. — A deve a B i seguenti capitali L. 1696 al 2 per %, L. 488 al 4 per %, L. 609 al 3 per %. Volendo ridurre questi capitali ad un solo interesse, questo qual sarà?

	L. 1696×2=	3392
	488×4=	1952
	609×3=	1827
Somma	L. 2793	L. 7171

si divida la somma dei prodotti per la somma dei capitali, e si avrà l'interesse comune di L. 2,57.[1]

RAGGUAGLIO SEMPLICE DI TEMPO.

216. Volendo ridurre ad un solo tempo più capitali, che

[1] Infatti le lire 1696 al 2 per % fruttano in un anno 33,92
le 488 al 4 19,52
le 609 al 3 18,27
onde in tutto.... lire 2793 fruttano.... 71,71

Ora per ridurre ad un interesse comune i tre capitali è chiaro che dovremo impiegare la loro somma comune, cioè le lire 2793 a tanto per cento in modo che renda in un anno il totale delle lire 71,71. E questo tanto evidentemente lo troveremo, dicendo: se lire 2793 danno lire 71,71, lire 100 daranno $x=\frac{71,71\times100}{2793}=\frac{7171}{2793}$, cioè si avrà l'interesse cercato, dividendo, come prescrive la regola, per la somma 2793 dei capitali la somma 7171 dei capitali moltiplicati nel respettivo annuo interesse parziale.

In maniera presso a poco consimile si dimostrerà pure la regola per il ragguaglio di tempo.

devono pagarsi a diversi tempi; 1.° si moltiplichi ciascun capitale per il suo tempo, 2.° la somma dei prodotti si divida per quella dei capitali, ed il quoziente darà il tempo ricercato.

Esempio. — A deve a B i seguenti capitali L. 4000 dopo 3 anni, L. 6000 dopo 4 anni, L. 2000 dopo 2 anni, L. 8000 dopo 5 anni. Volendo ridurre questi pagamenti ad un solo, domando a qual tempo si dovrà fare?

	L. $4000\times3=$	12000
	$6000\times4=$	24000
	$2000\times2=$	4000
	$8000\times5=$	40000
Somma	L. 20000	Anni 80000

fatta adunque la divisione si trovano anni 4, al termine dei quali dovrà farsi il pagamento della somma di L. 20000.

Volendo poi vedere che tanto è il pagare ogni capitale al suo respettivo tempo, come pagarlo tutto insieme dopo anni 4, suppongasi che tutti questi capitali siano impiegati ad un medesimo interesse, e che sia del 5 per % l'anno. Si cerchi prima qual frutto daranno separatamente nel respettivo loro tempo L. 4000 in anni 3; L. 6000, in anni 4; L. 2000 in anni 2, L. 8000 in anni 5; poi qual frutto darà la somma di L. 20000 in anni 4, e si troverà nell'uno e nell'altro caso per frutto totale L. 4000.

RAGGUAGLIO D'INTERESSE E DI TEMPO.

217. Volendo ridurre più capitali, posti a diverso interesse e diverso tempo, ad un solo interesse ed un solo tempo; 1.° si moltiplichi ciascun capitale per il suo interesse, e la somma dei prodotti si divida per la somma dei capitali, e si avrà l'interesse comune; 2.° ciascun prodotto si moltiplichi novamente per il suo tempo, e la somma dei secondi prodotti si divida per quella dei primi, e si troverà il tempo richiesto.

Esempio. — A deve a B i seguenti capitali con le appresso condizioni; L. 14000 al 3 per $^0/_0$ dopo anni 2, L. 20000 al 4 per $^0/_0$ dopo anni 3, L. 16000 al 5 per $^0/_0$ dopo anni 4; volendo pagare tutti questi capitali al medesimo tempo e col medesimo interesse, a qual interesse e a qual tempo dovranno pagarsi?

1.° Moltiplicando ciascun capitale per il suo interesse si avrà:

	L. 14000×3=	L. 42000
	20000×4=	80000
	16000×5=	80000
Somma	L. 50000	L. 202000

e divisa la somma dei prodotti per quella dei capitali, l'interesse comune sarà L. 4,04.

2.° Moltiplicando i prodotti antecedenti per il respettivo tempo si avrà:

	L. 42000×2=	84000
	80000×3=	240000
	80000×4=	320000
Somma	L. 202000	Anni 644000

e divisa la somma dei secondi prodotti per quella dei primi, si trova che il pagamento comune dovrà farsi dopo anni 3. 2. 7 $\frac{73}{101}$.

Si può verificare la data operazione con trovare quanto renderebbe ciascun capitale col respettivo interesse e tempo, e quanto la loro somma di L. 50000, con l'interesse di L. 4,04 per cento in anni 3. 2, 7 $\frac{73}{101}$, e nell'uno e nell'altro caso si troverà il frutto di L. 6440.

DELLE TARE.

217. Un numero di chilogrammi, che comunemente per ogni cento o migliaio si accordano senza pagamento al

compratore di qualche mercanzia, si chiama *tara*, che deve sottrarsi dal numero intero dei chilogrammi al netto pagabili.

Con la regola del tre si risolve qualunque quesito di questa specie. Per primo termine si pone comunemente il 100 oppure il 1000; per il secondo la tara, che si accorda o per cento o per migliaio; per il terzo termine il numero dato dei chilogrammi della mercanzia; al quarto, che deve trovarsi, corrisponde la tara totale pattuita sopra la data mercanzia. Eccone gli esempi.

Esempio I. — Paolo vende Cg. 3860 di lana con la tara di Cg. 5 per %; quanto restano al netto pagabile?

$$\text{Se } 100 : 5 : : 3860 : x = \text{Cg. } 193$$

sottraggo 193, che sono i chilogrammi di tara dai Cg. 3860, ed ho al netto Cg. 3667 pagabili.

Esempio II. — Giovanni comprò Cg. 3490 di lino con tara di Cg. 72 ½ per ‰; quanti ne ebbe a pagamento?

$$\text{Se } 1000 : 72{,}5 : : 3490 : x = 253{,}025$$

sottratti al solito i Cg. 253,025 tara dal numero totale, Giovanni ha pagabili Cg. 3236,975.

Esempio III. — Furono venduti Cg. 3780 di carne con la tara di Cg. 8 ½ per %, ed i chilogrammi tarati si valutarono lire 40 il %; quanto costarono?

$$\text{Se } 100 : 8{,}5 : : 3780 : x = \text{Cg. } 321{,}3$$

levo al solito dal numero totale dei chilogrammi i Cg. 321,3 di tara, e restano pagabili Cg. 3458,7. Questi furono valutati L. 40 per %, onde

$$\text{Se } 100 : 40 : : 3458{,}7 \; x = 1383{,}48$$

dunque il prezzo sarà lire 1383,48.

Si risolvano per esercizio i seguenti esempi.

I. Il Chilogrammo della seta costa L. 45,50; ne compro

Cg. 1486 con la tara di 50 grammi per chilò; quanto spendo? Rispondo che spendo L. 64232,35.

II. Ho comprato Cg. 3480 formaggio a lire 125 per °/₀ al netto; quanto spenderò essendomi stata accordata la tara di Cg. 6 $^{1}/_{5}$ per °/₀. Rispondo, che spenderò L. 4080,30.

III. Si vendono 25 quintali e mezzo d'olio a Lire 2,46 il chilogrammo e con la tara di Cg. 5 per °/₀; quanto costano? Rispondo che costano L. 5959,35.

DELLE REGOLE DI SOCIETÀ O COMPAGNIA.

218. La regola di società o compagnia insegna a dividere i guadagni e gli scapiti fatti in società da più interessati, in ragione dei differenti capitali, che ciascuno di essi ha impiegati nella massa comune. Essa è di un uso estesissimo nel commercio; e come non ad altro si riduce che a dividere un numero dato in più parti respettivamente proporzionali ad altri numeri dati, così non è che l'applicazione della regola del tre semplice più volte ripetuta. Cinque casi noi distingueremo nelle società.

1.° Quando fra i soci è eguale il tempo e il capitale diverso.

2.° Quando è eguale il capitale e diverso il tempo.

3.° Quando è diverso sì il tempo come il capitale.

4.° Quando vi concorre la mercanzia.

5.° Quando vi concorre l'impiego della persona.

Dai seguenti esempi si apprenderà facilmente la pratica da tenersi in ciascuna di queste cinque occorrenze.

Primo caso.

219. Tre mercanti A, B, C posero in commercio, il primo L. 9600, il secondo L. 3200, ed il terzo L. 2400. Il guadagno, che dopo un certo tempo risultò da queste parti fu di lire 1900. Come valutereste il guadagno di ciascuno?

A L. 9600
B » 3200
C » 2400

$$\text{L. } 15200 : 1900 :: \begin{cases} 9600 : x = \text{L. } 1200 \text{ guadagno di A} \\ 3200 : x = \text{ » } \;\; 400 \text{ guadagno di B} \\ 2400 : x = \text{ » } \;\; 300 \text{ guadagno di C} \end{cases}$$

Somma . . . L. 1900

Si sommano le porzioni di ciascheduno e si ha L. 15200: è evidente che questa somma, la quale è il fondo della società, deve stare al guadagno totale come ciascuna somma sta al guadagno parziale. Fatte perciò tre proporzioni, si trovano le tre parti separatamente con altrettante regole del tre, come si vede, le quali poi sommate insieme, se l'operazione sarà fatta bene, daranno il guadagno totale.

Osservazione I. — Questo quesito, come pure gli altri, si possono variare in più maniere; il metodo però di risolverli deriva sempre dallo stesso principio. Nel suddetto esempio, dato il guadagno di A, B, C, e data pure la somma dei capitali di ciascheduno in L. 15200, si troverà il capitale di ciascuno, conosciuta la somma dei guadagni parziali, dicendo: se tutto il guadagno di L. 1900 è provenuto dalla somma dei capitali 15200, i guadagni parziali di A, B, C, da 'quali capitali risulteranno? E fatte le tre solite operazioni si troverà essere il capitale di A L. 9600, di B L. 3200 e di C L. 2400.

Osservazione II. — Egualmente nel medesimo quesito, dato il guadagno totale di L. 1900, dato il guadagno di A L. 1200 e dati due capitali di B L. 3200 e di C L. 2400, si troverà il capitale di A ed il guadagno di B e di C col seguente modo: si sottri il guadagno di A L. 1200 dal guadagno totale L. 1900, e resteranno le porzioni unite di B e C in Lire 700. Dipoi, fatta la somma dei capitali di B e di C, si avranno L. 5600; quindi si eseguiranno le due proporzioni dicendo: se L. 5600 fruttano L. 700, quanto frutteranno i capitali di B e di C? E si troverà il guadagno di

B L. 400 e quello di C L. 300. Infine per trovare il capitale di A si dirà: se il guadagno di B L. 400, deriva dal suo capitale di L. 3200, il guadagno di A L. 1200, da qual capitale deriverà? Ed operando al solito si troverà derivare dal capitale di A L. 9600.

Secondo caso.

220. Furono lasciate da un possidente a tre servitori che chiamo A, B e C L. 1000 da dividersi fra loro in proporzione del tempo del loro servizio. Il primo A lo aveva servito per 9 anni, il secondo B per 7, il terzo C per 4; quanto toccò a ciascuno?

A anni 9
B anni 7
C anni 4

$$20 : \text{L. } 1000 :: \begin{cases} 9 : x = \text{L. } 450 \text{ parte di A} \\ 7 : x = \text{» } 350 \text{ parte di B} \\ 4 : x = \text{» } 200 \text{ parte di C} \end{cases}$$

Somma . . . . L. 1000

Sommo gli anni di A, di B e di C, ed ho 20, quindi dico: se 20 anni di servizio danno L. 1000, quanto gli anni di servizio di A, di B e di C? e fatte al solito le tre operazioni trovo le parti di ciascuno, che sommate insieme compongono L. 1000, capitale lasciato.

Osservazione I. — Data la somma dei tempi e le porzioni parziali di A, B e C, si troveranno i tempi parziali di ciascuno, dicendo: se la somma lasciata Lire 1000, corrisponde alla somma di 20 anni di servizio, le porzioni di A, B e C a qual tempo di servizio corrisponderanno? Fatte al solito le operazioni si troverà il tempo di A, B e C.

Osservazione II. — Se poi dati gli anni di servizio 20, data la parte di A 450, di B 350, e il tempo di C anni 4, voglia trovarsi il tempo di A e B, sottratti primieramente i

quattro anni di C dalla somma totale 20, si dirà: se L. 800, somma delle parti di A e B, corrispondono ad anni 16 di servizio, le parti parziali di A e B a quanti anni di servizio corrisponderanno? Operando al solito si troveranno per A anni 9 e per B 7.

Dipoi si troverà la parte di C dicendo: se anni 9 di servizio di A hanno dato di parte L. 450, anni 4 di C qual parte daranno? E si troverà essere la parte di C L. 200.

Osservazione III. — Data egualmente nello stesso quesito la somma totale lasciata L. 1000, dati i due tempi di servizio di A anni 9 e di B anni 7, e la parte di C L. 200, si troveranno le porzioni dovute ad A ed a B, primieramente sottraendo la porzione di C dalla somma totale lasciata, con che resteranno L. 800, e quindi diremo: se per 16 anni di servizio A e B hanno Lire 800, quanto dovrà avere ciascuno parzialmente, cioè A per 9 anni e B per 7? Operando con le solite proporzioni si troverà L. 450 per il servizio dei 9 anni di A, L. 350 per gli anni 7 di B. Quindi se la parte di A L. 450 corrisponde al servizio di anni 9, a quanti anni di servizio corrisponderà la parte di C L. 200? E corrisponderà ad anni 4.

Terzo caso.

221. Tre mercanti A, B, C si unirono in società. A pose per suo capitale Lire 3500 per mesi 12; B Lire 5400 per mesi 8; C Lire 6300 per mesi 5; al termine della società trovarono un guadagno di L. 2334; qual fu il guadagno di ciascuno?

A	L.	3500 × 12 mesi =	L. 42000
B	»	5400 × 8 mesi =	» 43200
C	»	6300 × 5 mesi =	» 31500
		Somma . . .	L. 116700

$$116700 : 2334 :: \begin{cases} 42000 : x = & \text{L. } 840 \text{ guad. di A} \\ 43200 : x = & \text{» } 864 \text{ guad. di B} \\ 31500 : x = & \text{» } 630 \text{ guad. di C} \end{cases}$$

Somma . . . L. 2334

Si moltiplica ciascun capitale per il tempo respettivo, cioè quello di A per 12, quello di B per 8, quello di C per 5, e si sommano questi prodotti. Quindi la somma sta al guadagno totale, come ciascun prodotto sta al guadagno parziale che si cerca. Fatte le solite proporzioni, si ha il guadagno di ciascheduno.

Osservazione. — Nel suddetto esempio, data la somma dei capitali di A, B, C in L. 15200, e dato il guadagno di A L. 840 per mesi 12, quello di B L. 864 per mesi 8 e quello di C L. 630 per mesi 5, si troverà il capitale, che ciascuno ha impiegato.

Questo si otterrà col dividere il guadagno di ciascheduno per il suo respettivo tempo stato a frutto, onde avere una porzione di guadagno, che ciascuno ha avuto a ragione del semplice capitale, non a ragione del tempo, e sommate queste porzioni di guadagno si dirà: se le somme di tali porzioni vengono dall'intero capitale di L. 15200 le porzioni di A, B e C, da quali capitali verranno? Eseguite al solito le proporzioni si troverà il capitale di A L. 3500, di B L. 5400, di C L. 6300.

Molte altre variazioni si potrebbero fare a questo quesito come agli altri, ma per brevità si tralasceranno; poichè la maniera di risolvere tali quesiti è sempre la medesima, e appoggiata sempre sullo stesso principio.

Quarto caso.

222. Due mercanti A e B si sono uniti in società. A sborsò L. 2400, B pose Cg. 266 $^1/_2$ seta: il guadagno di A è stato L. 600 quello di B L. 700. Si domanda quanto sia stata valutato il chilogrammo della seta di B?

Si trovi prima l'importare totale della seta dicendo: se L. 600 sono derivate da L. 2400, da qual capitale saranno derivate L. 700? Fatta al solito la proporzione, si troverà essere derivate dal capitale di L. 2800; queste si dividano per Cg. 266 $^{1}/_{3}$, e si troverà per quoziente L. 10,51 circa, prezzo di un chilò di seta.

Quinto caso.

223. Due negozianti A, B convengono di porre in traffico L. 3200, cioè il primo L. 2400, il secondo L. 800, con patto che B debba impiegarvi la sua assistenza, e al termine del negozio dividere tutto per metà. Accadde che A non potè mettervi che L. 1000, ed altrettante ne pose B: al termine della società trovarono L. 3500 fra capitale e guadagno: quanto dovrà avere ciascuno?

Se il capitale totale fosse stato Lire 3200, e avesse ciascuno posta la metà, come richiederebbesi a cose eguali, per dividere il prodotto per metà, questa sarebbe stata L. 1600 per ciascheduno. Ma A doveva porre L. 2400 e B soltanto L. 800, dunque A cedeva a B, in compenso dell'impiego della persona, L. 800 del suo capitale.

Fatto ciò si dica: se A mettendo L. 2400, cedeva L. 800, mettendo solo Lire 1000, quanto dovrà cedere? E si troverà 333 $^{1}/_{3}$.

Il capitale dunque di A resterà L. 666 $^{2}/_{3}$ e il capitale di B L. 1333 $^{1}/_{3}$, che sommate insieme formeranno L. 2000.

Si facciano ora le due proporzioni dicendo: se L. 2000 sono divenute Lire 3500 fra capitale e guadagno, quanto dovrà toccare ad A per il capitale di L. 666 $^{2}/_{3}$, quanto a B per il capitale di Lire 1333 $^{1}/_{3}$? E risulteranno per A L. 1166,67 e per B L. 2333,33.

224. Proponiamo adesso altri esempi relativi all'uno o all'altro dei cinque esposti casi, che nelle diverse convenzioni possono bene spesso intervenire.

Esempio I. — Quattro negozianti intrapresero una so-

cietà, il primo A v'impiegò L. 1800, il secondo B un terzo più di A, il terzo C un quarto più di B, il quarto D un quinto più di C. Il guadagno totale fu di L. 6000. Quanto deve darsi a ciascuno?

Si aggiunga al capitale di A lire 1800 il terzo che è L. 600, e si ha il capitale di B L. 2400; a questo si aggiunga il quarto che è 600, e si ha il capitale di C L. 3000; egualmente a questo si aggiunga il quinto che è L. 600, e si ha il capitale di D L. 3600; sommati questi capitali si avranno L. 10800.

Quindi si dica: se L. 10800 hanno guadagnato L. 6000, quanto avrà guadagnato il capitale di A L. 1800? eseguita la proporzione si troverà avere guadagnato A L. 1000: aggiuntovi il terzo, il guadagno di B sarà L. 1333 $^1/_3$; a questo aggiunto il quarto guadagno di C sarà L. 1666 $^2/_3$; a questo finalmente aggiunto il quinto, il guadagno di D sarà L. 2000. Dipoi sommati i guadagni torneranno L. 6000.

Esempio II. — A e B compagni in un negozio hanno guadagnato L. 5600. A tenne il suo capitale di L. 1600 per anni 4 $^1/_2$, B il suo per anni 6, e di guadagno ebbe L. 2400. Qual era il capitale di B?

Si sottragga il guadagno di B L. 2400 dal guadagno totale L. 5600, e resterà il guadagno di A L. 3200, poi si dica: se L. 3200, guadagno di A in anni 4 $^1/_2$, furono guadagnate da L. 1600, le L. 2400, guadagno di B in anni 6, da qual capitale saranno state guadagnate? Questa è una regola del cinque: e come il guadagno è in ragione diretta, e il tempo in ragione inversa del capitale, dovremo dunque operare secondo il metodo già insegnato al § 189, e si troverà il capitale cercato di B L. 900.

Esempio III. — A, B, C hanno guadagnato in un traffico Scudi 6000; sciolta la società, il primo tra capitale e guadagno ebbe Sc. 40000, il secondo Sc. 60000, il terzo Sc. 50000. Qual fu il guadagno ed il capitale separato di ciascheduno?

Si sommino le tre partite contenenti capitali e frutti, e

si avranno Sc. 150000; dipoi si facciano le tre proporzioni, e si troverà essere il guadagno di A Sc. 1600, di B Sc. 2400, di C 2000. Trovati i guadagni respettivi, si sottragga ciascun guadagno dalla respettiva somma del capitale e guadagno, e si avrà il capitale di A Sc. 38400, di B Sc. 57600, di C Sc. 48000. Sommati questi capitali con i guadagni respettivi, ritornerà la somma di Sc. 150000.

Esempio IV. — Da A, B e C fu eretto un traffico. A vi pose L. 22000, B Cg. 1000 di seta a L. 20 il Cg., e C Metri 2000 panno a L. 9; dopo un dato tempo sciolsero la società, e trovarono un guadagno di L. 12000, e di questo B ebbe di sua parte L. 4000; qual fu il guadagno di A e di C?

Si sottragga il guadagno di B Lire 4000 dal guadagno totale L. 12000, e resteranno per A e C L. 8000.

Ora il capitale di C essendo Metri 2000 panno a L. 9, forma L. 18000, che unite al capitale di A L. 22000 formeranno in tutto L. 40000; onde dovrà dirsi: se L. 40000 hanno guadagnato L. 8000, quanto i capitali di A e C separatamente? E si troverà per A L. 4400 e per C L. 3600.

Esempio V. — A e B negozianti stabiliscono tra loro una società durabile anni 6, con patto che A debba porvi Lire 5000 e B L. 3000 e l'impiego della sua persona, e per questo debba avere tutto per metà. Accadde che A mette soltanto L. 3600, e altrettante ne mette B, e la società non dura che anni 4, dopo i quali, fra capitale e guadagno trovarono L. 10000. Quanto dovrà toccare a ciascheduno?

In questo caso il guadagno non può dividersi per metà, perchè i capitali non sono stati messi secondo i patti. Adunque, per trovare come abbia a farsi la divisione e del capitale e del guadagno, conviene osservare qual diritto abbia ciascuno dei due soci sopra la somma dei capitali, che è L. 7200. Ora se A secondo la convenzione avesse poste L. 5000 e B L. 3000, tutto il capitale sarebbe stato L. 8000, la cui metà è L. 4000, e per conseguenza A avrebbe ceduto a B L. 1000 del suo capitale. Posto ciò si

formi la proporzione composta diretta, dicendo: se A mettendo L. 5000 per anni 6 cedeva a B L. 1000, mettendone soltanto L. 3600 per anni 4, quanto gli dovrà cedere? Fatta la soluzione, la somma che A dovrà cedere a B sarà di L. 480; dunque il capitale di A resterà L. 3120, e quello di B diventerà L. 4080, che sommati daranno, come sopra L. 7200.

Ora si dica: se col capitale di L. 7200 si sono formate Lire 10000, quanto dovrà toccare ad A per il capitale di L. 3120, e quanto a B per il capitale delle L. 4080? Fatte le solite proporzioni, risulteranno per capitale e frutto di A L. 4333 $^{1}/_{3}$, e per B L. 5666 $^{2}/_{3}$, che sommate ritorneranno le suddette L. 10000.

Esempio VI. — Fallisce un negoziante: lascia un capitale di L. 4000, e un debito con A di L. 3000, con B di L. 2100, e con C di L. 2900; domando quanto dovrà avere ciascuno a proporzione del suo credito?

Sommati i crediti di A, B e C formeranno L. 8000, e come il mercante non ha lasciato di capitale che L. 4000, così si dica: se al credito totale di L. 8000, restano soltanto L. 4000, quanto dovranno avere A, B e C in proporzione del loro credito? E fatte le solite proporzioni si troveranno per A L. 1500, per B L. 1050 e per C L. 1450.

Esempio VII. — A prende a pigione una casa per L. 360; dopo mesi 3 $^{1}/_{2}$ riceve un compagno B con patto che paghi la sua porzione in proporzione del tempo; dopo altri mesi 4 $^{1}/_{2}$ riceve un secondo compagno C con la medesima condizione. Domando, alla fine dell'anno, quanto dovrà pagare ciascuno?

È evidente che A dovrà pagare l'intera rata, per i primi mesi 3 $^{1}/_{2}$, la metà della rata per gli altri 4 $^{1}/_{2}$, e il terzo per i 4 rimanenti. Ora per trovare quanto dovrà pagare ciascuno si dica: se per 12 mesi si pagano L. 360, quanto per mesi 3 $^{1}/_{2}$, quanto per 4 $^{1}/_{2}$ e quanto per 4.

Eseguite le proporzioni si troveranno L. 105 per la 1.ª rata, 135 per la 2.ª e 120 per la 3.ª. Ad A dunque toc-

cheranno L. 105, più la metà di L. 135, che è L. 67,50, più il terzo di L. 120 che è lire 40, in tutto L. 212,50: a B L. 67,50 più L. 40 e in tutto L. 107,50 ed a C L. 40.

SOCIETÀ RURALI.

225. Due specie di società rurali devono principalmente distinguersi.

1.ª La società di pascolo.

2.ª La società di bestiame.

La prima ha luogo quando più proprietari di bestiami prendono un pascolo in comune.

La seconda quando un proprietario di bestiami li dà ad un pastore per farne la divisione dopo un dato tempo, secondo le condizioni stabilite fra loro. Cominciamo dalla prima, che si tratta secondo l'ordine e il metodo di tutte le altre.

Società di Pascolo.

Esempio I. — A, B, C possidenti prendono alcune praterie in affitto per L. 300: A vi pone a pascolare pecore 200, B 240, C 160; quanto dovrà pagare ciascuno?

A pecore 200
B pecore 240
C pecore 160

Somma 600 : 300 : : $\begin{cases} 200 : x = \text{L. } 100 \text{ che dovrà pag. A} \\ 240 : x = \text{» } 120 \text{ che dovrà pag. B} \\ 160 : x = \text{» } 80 \text{ che dovrà pag. C} \end{cases}$

Somma . . . L. 300

Si sommino le pecore e saranno 600, dipoi si dica: se per pecore 600 si pagano L. 300, quanto dovrà pagare A per pecore 200, B per pecore 240 e C per pecore 160? Ed operando al solito si troveranno per A L. 100, per B L. 120, per C L. 80, che in tutto sono L. 300.

Esempio II. — A pastore prese un pascolo per L. 400, vi tenne in proprio vacche 40 per mesi 6, inoltre vi ammise B con vacche 50 per mesi 4 e C con vacche 60 per mesi 3: ed infine ne ritrasse di soprappiù L. 100 di fieno. Domando quanto dovrà pagare ciascuno di sua porzione?

Primieramente si levino da L. 400 le L. 100 ritratte dal fieno, e resteranno da pagarsi L. 300.

A vacche $40 \times 6 = 240$
B vacche $50 \times 4 = 200$
C vacche $60 \times 3 = 180$

$$\text{Somma} \ldots 620 : 300 :: \begin{cases} 240 : x = \text{L. } 116{,}13 \\ 200 : x = \text{» } 96{,}77 \\ 180 : x = \text{» } 87{,}10 \end{cases}$$

Somma . . . L. 300,00

Si moltiplichino le vacche di ciascheduno per il tempo che sono state nel pascolo, e si avranno per A vacche 240, per B 200, per C 180, che sommate saranno vacche 620. Dipoi si dica: se per vacche 620 si pagano L. 300, quanto dovrà pagarsi per le vacche di A, B, C? Ed operando al solito risulteranno per A L. 116,13 per B L. 96,77, per C L. 87,10; e riunite queste tre porzioni torneranno L. 300.[1]

226. *Osservazione.* — In queste società può accadere che un pastore conduca a pascolare nel tempo stesso delle pecore, delle vacche, dei cavalli ec. ed in questo caso si ridurranno i diversi capi di bestiame ad uno solo. Se ne veda per maggiore chiarezza un esempio.

A e B pastori hanno comprato una quantità di pascoli per il prezzo di L. 230. A vi mandò pecore 30, vacche 20

[1] È chiaro che tanto è tenere a pascolo 40 vacche per mesi 6, che tenerne per un mese solo un numero sei volte maggiore, ossia 240. Perciò nell'esposta regola si moltiplica per la durata del pascolo la quantità delle vacche che ne hanno goduto, e se ne cangia il numero effettivo in quello che risulta dall'anzidetto prodotto. Questa regola non è che un'applicazione di quella del 3 composta.

e cavalli 10; B vacche 30 e capre 60. Per convenzione fatta fra loro, una vacca dovrà valutarsi per pecore 2, un cavallo per pecore 3 ed una capra per pecore 1 $^1/_2$. Quanto dunque dovrà pagare ciascuno?

Primieramente si riducano le vacche ed i cavalli di A a pecore, moltiplicando quelle per 2, questi per 3, e si otterranno i prodotti 40 e 30.

Si passi quindi a ridurre a pecore le 30 vacche di B, moltiplicandole per 2, e si avrà 60. Riducansi egualmente le capre 60 moltiplicandole per 1 $^1/_2$, e si avrà 90. Si sommino le presenti pecore di A, che sono 30+40+30=100, egualmente si sommino le pecore di B, che sono 60+90 =150.

Ora si uniscano le pecore di A 100 e quelle di B 150, e si avranno pecore 250. Quindi si dica: se per 250 pecore si pagano L. 230, quanto si pagherà per pecore 100 di A, e quanto per pecore 150 di B? ed eseguite le due proporzioni si troverà dover pagare A L. 92 e B L. 138. Riunendo queste due porzioni, tornano per riprova L. 230.

Società di bestiami.

227. *Esempio* I. — Giovanni dà ad un pastore pecore 100 per anni 4, con patto che dopo questo tempo si debba dividere per metà il numero totale delle pecore, che si troveranno. Dopo anni 2 e mesi 4 $^1/_2$ un caso impreveduto obbliga a troncare la società, e in quell'epoca si trovano in tutto pecore 184. Si domanda quante ne debbono toccare a Giovanni e quante al pastore?

Si levino dalle pecore 184 le pecore 100, costituenti il primo capitale, e resteranno di guadagno pecore 84: al qual guadagno avendo il pastore contribuito con le sue cure, dunque deve averne la metà secondo la condizione, cioè pecore 42; benchè non siano terminati gli anni prescritti nella società.

Rapporto al capitale, che è pecore 100, non può il pa-

store ripetere la metà, cioè pecore 50, ma soltanto la porzione corrispondente al tempo di anni 2 e mesi 4 $^1/_2$. Si dica adunque: se per anni 4 deve avere pecore 50, per anni 2 e mesi 4 $^1/_2$ quante ne dovrà avere? Eseguita la proporzione si troverà per quarto termine pecore 29 $^{11}/_{16}$.

Dunque toccheranno al pastore pecore 42+29 $^{11}/_{16}$, in tutto pecore 71 $^{11}/_{16}$, ed a Giovanni pecore 112 $^5/_{16}$. Quanto alle due frazioni potranno i soci accomodarsi fra loro in denaro.

Esempio II. — Antonio ha dato ad un pastore pecore 140 per 6 anni, a condizione che dopo questo tempo debbano dividersi per metà il capitale ed il guadagno. Accade che dopo 3 anni Antonio dà al pastore altre pecore 60 per anni 8 con la medesima condizione. Volendo ridurre i due termini ad un solo, quando si dovrà fare la divisione?

Si moltiplichino le prime pecore 140 per 3, numero degli anni, nei quali il pastore deve tuttora ritenere le prime pecore allorchè riceve le seconde. Inoltre si moltiplichino le altre 60 per 8 anni: si sommino i due prodotti, e si divida la somma 900 per quella di tutte le pecore, che è 200; e si avrà in quoziente anni 4 e mesi 6, tempo nel quale dovrà farsi la divisione.[1]

Esempio III. — Un proprietario dà ad un pastore pecore 200 per anni 3, con patto che egli debba avere $^2/_3$ del totale numero, che si troverà in essere alla detta scadenza, ed il pastore ne debba avere $^1/_3$. Dopo 2 anni il numero dello pecore a causa di un'epidemia si ridusse a 130. Il Proprietario scioglie la società; quante pecore dunque debbono toccare a ciascuno?

[1] Pecore 140 che pascolano per 3 anni, equivalgono a pecore 420, come pecore 60 per 8 anni vagliono per pecore 480 per un anno. Il pastore adunque che ha le 140 pecore per anni 3 e le 60 per 8, si trova nel caso di chi avesse per un solo anno pecore 900. Ma non ne ha effettive che 200; dunque per corrispondere ai patti voluti dalla società fatta gli abbisognerà un tempo tanto più grande di un anno, quanto il 900 lo è di 200, e che visibilmente equivarrà a 900 : 200 ossia 4 $^1/_2$.

Nelle società come abbiamo di sopra accennato, i soci debbono partecipare, secondo le convenzioni stabilite, sì del guadagno, come dello scapito, qualora non sia questo imputabile a colpa di alcuno di loro, come è appunto in questo caso.

Ora per fare la soluzione del presente esempio, si osservi quante pecore al termine di anni 3 sarebbero toccate al pastore per $^1/_3$ di una porzione, se fossero rimaste 200, e si troverà che sarebbero state 66 $^2/_3$; più si formi una proporzione composta diretta dicendo: se di pecore 200 dopo anni 3 toccano al pastore 66 $^2/_3$, di pecore 130 rimaste dopo anni 2, quante gliene toccheranno? Eseguita la proporzione, il termine ricercato sarà di pecore 28 $^8/_9$.

Esempio IV. — Un mercante dà ad un pastore pecore 300 col patto, che egli ne aggiunga 60, e dopo anni 6 si debba dividere tutto per metà. Al termine del tempo fissato, furono trovate pecore 450; ma prima di fare la divisione il mercante ha saputo, che il pastore non ha aggiunto nessuna pecora. Quante ne dovranno toccare a ciascuno?

In questo caso si osservi qual numero di pecore sarebbero toccate al pastore, se fosse stato fedele al contratto, e la metà spetterà al mercante, mentre nei contratti il pregiudizio sta a carico di chi manca, e non di chi adempie per parte sua esattamente i patti convenuti.

Si dica adunque: se pecore 300 sono divenute 450, pecore 360 quanto sarebbero divenute? Fatta la proporzione si troveranno pecore 540; di queste se ne dia la metà a forma dei patti al mercante, cioè 270, ed al pastore le rimanenti 180.

DEI RIPARTI.

228. I riparti accadono ogni qualvolta più persone devono dividersi una spesa comune e servono per lo più a fissare la distribuzione delle pubbliche imposizioni. Questa

distribuzione non si ragguaglia sempre e da per tutto nello stesso modo: alcune volte si ragguaglia a ragione d'un tanto dell'estimo, altre a ragione dei fuochi o famiglie che compongono una comunità; anche il numero degli individui, dei capitali ec. possono esser presi per rapporto in tali ragguagli. — I quesiti di riparto si possono alcune volte confondere con quelli di società.

Passiamo a darne qualche esempio pratico.

Esempio I. — Una comunità deve pagare per centesimi 75 d'estimo Lire 1200, si domanda quanto dovrà pagare ciascuno dei seguenti possidenti, cioè A per centesimi 25 d'estimo, B per 20, C per 10 e D per 20?

Primieramente si cerchi quanto dovrà assegnarsi per ogni centesimo d'estimo, dicendo centesimi 75 stanno a L. 1200 come cent. 1 ad x=L. 16,00. — Ora se un centesimo d'estimo è imposto per Lire 16, di quanto sarà imposto A per cent. 25, B per 20, C per 10 e D per cent. 20? In questo caso essendo il 1.° termine della proporzione 1 basterà moltiplicare il secondo per l'estimo di A, B, C, D ed il loro respettivo prodotto sarà ciò che dovrà pagare ciascuno

A per centesimi 25	. . .	L.	400
B per centesimi 20	. . .	»	320
C per centesimi 10	. . .	»	160
D per centesimi 20	. . .	»	320
Somma	. . .	L.	1200

Esempio II. — In un pubblico lavoro sono state spese L. 6300: di queste la Provincia concorre a pagarne la metà, ed il resto deve pagarsi da 4 Comunità in ragione dei fuochi che le compongono. La comunità A è composta di 420 fuochi, B di 200, C di 480, D di 300, si domanda quanto toccherà a ciascun fuoco e a ciascuna Comunità?

Si levi dalle L. 6300 la metà, pagata dalla Provincia, e resterà a carico delle quattro comunità l'altra metà, cioè 3150.

Dipoi per trovare il contingente di ciascun fuoco si prenda la somma di tutti i fuochi che sale a 1400, e per esso numero si dividano le L. 3150 e si avranno L. 2,25 contingente cercato. Questo si moltiplichi per il numero dei fuochi di ciascuna comunità, e si troverà di quanto debba tassarsi ciascuna, cioè

A per fuochi 420 . . .	L.	945
B per fuochi 200 . . .	»	450
C per fuochi 480 . . .	»	1080
D per fuochi 300 . . .	»	675
Somma . . .	L.	3150

Esempio III.— Per il mantenimento della barca nel passaggio d'un fiume occorrono annualmente L. 960: quanto toccherà a ciascuna di due Comunità che si ripartono la spesa in ragione inversa della lontananza, sapendosi che la Comunità A dista dalla barca 2 chilometri, e l'altra B solo Cm. 1,250?

È evidente che la minore spesa sarà a carico della Comunità A, e la maggiore della Comunità B, e che se per una distanza totale di $2+1,25=3,25$ si suppone di dover pagare *uno*, per una distanza doppia, tripla, . . . la spesa sarà $^1/_2$, $^1/_3$, . . . onde, essendo una regola del 3 inversa, ne vengono le proporzioni

$$2 : 3,25 :: 1 : x=1,625$$
$$1,25 : 3,25 :: 1 : x=2,6$$

Distanze Cm. 3,25 L. 4,225

Dalle quali rilevasi che, supposto L. 4,225 la spesa totale, quella di A sarebbe 1,625 e quella di B 2,6 e che fatta, come è veramente, eguale a Lire 960, ciò che tocca a ciascuna Comunità viene dato nella maniera seguente, cioè:

$$4,225 : 960 :: \begin{cases} 1,625 : x=369,23 \text{ parte di A} \\ 2,6 \quad : x=590,77 \text{ parte di B} \end{cases}$$

L. 960,00

Esempio IV. — Tre Comuni debbono concorrere alle spese della costruzione d'un ponte che ascesero a L. 40000: il riparto di tal somma deve essere fatto in ragione diretta della popolazione e in ragione inversa della loro distanza dal ponte. La Comunità A che è distante 3 chilometri ha una popolazione di 10 mila abitanti, la Comunità B che dista Cm. 2, ha 3 mila abitanti, la terza C ne ha 8 mila ed è distante 4 chilometri.

Calcolo come nel caso antecedente e dietro la medesima ipotesi ciò che debba pagare ciascun comune: moltiplico poi ognuna di queste parti per il respettivo numero d'abitanti concorrenti alla spesa, facendole così crescere proporzionalmente alla popolazione

Per A	$3 : 9 :: 1 : x = 3$	; $3 \times 10000 = 30000$
Per B	$2 : 9 :: 1 : x = 4{,}5$	; $4{,}5 \times 3000 = 13500$
Per C	$4 : 9 :: 1 : x = 2{,}25$	; $2{,}25 \times 8000 = 18000$
Distanze Ch. 9		Spese L. 61500

Da ciò rilevasi che, supposto la spesa totale L. 61500, A dovrebbe pagare L. 30000, B 13500, C 18000; d'onde

$$61500 : 40000 :: \begin{cases} 30000 : x = \text{L. } 19512{,}19 & \text{parte di A.} \\ 13500 : x = \text{L. } 8780{,}49 & \text{parte di B.} \\ 18000 : x = \text{L. } 11707{,}32 & \text{parte di C.} \end{cases}$$

Totale . . . L. 40000,00

DELLE PROVVISIONI.

229. La provvisione è una quantità di danaro che si accorda per lo più sopra un centinaio ai riscotitori, ai sensali, ai cambisti od altri per loro assegnamento e guadagno. Con la regola del tre si risolvono i quesiti di questa specie, come può vedersi nei seguenti esempi.

Esempio I. — Un sensale ha fatto vendere ad un mercante varie merci per il prezzo di L. 8586, e gli si deb-

bono, secondo i patti, soldi 2 per lira di sua provvisione. Qual ne sarà l'avere?

È chiaro che se una lira di provvisione dà $^2/_{20}$, L. 8586 daranno nella stessa proporzione il numero che si cerca: onde

$$L.\ 1 : 0{,}10 :: L.\ 8586 : x = L.\ 858{,}60$$

Però deve avere il sensale L. 858,60.

Esempio II. — Un cassiere ha riscosso L. 18464,20 ed ha di sua provvisione 5 per $^0/_0$; qual sarà il guadagno?

Se la sua provvisione è di L. 5 per $^0/_0$, si avrà dunque la proporzione:

L. $100 : 5 :: 18464{,}20 : x = 923{,}21$ guadagno del cassiere.

Esempio III. — Un banchiere prende $^3/_5$ di lira per $^0/_0$ di sua provvisione per ogni rimessa di danaro. Riscuoto da esso una cambiale di L. 1361,85; quanto gli devo dare?

Prendendo il banchiere $^3/_5$ per $^0/_0$ di provvisione avrò la proporzione:

$$L.\ 100 : {^3/_5} :: 1361{,}85 : x = L.\ 8{,}17.$$

Dunque dovrò dare al Banchiere di provvisione L. 8,17.

DEI BARATTI.

230. Il baratto 1.° è *semplice* se una mercanzia si cambia contro di un'altra; 2.° è *composto* se il cambio o permuta si fa parte in contante, parte in mercanzia; 3.° è *col tempo* se si assegna un termine al pagamento della mercanzia.

La regola dei baratti consiste nel valutare le mercanzie per il loro prezzo stabilito, onde abbia luogo un giusto conguaglio. Si venga agli esempi di ciascuna delle tre specie, che abbiamo assegnate.

Specie prima.

231. *Esempio* I. — Un mercante ha metri 80 di panno del prezzo di L. 15 il metro: lo vuole barattare in tanti

chilogrammi di seta che costa L. 12 il chilò; quanti chilogrammi di seta potrà avere in conguaglio dei metri 80 di panno?

Si trovi primieramente il valore di metri 80 del panno a L. 15 il metro, e si avranno L. 1200; ora si dica: se con L. 12 si ha un chilogrammo di seta, con L. 1200, quanti se ne avranno? Eseguita la regola del tre si avrà x=Cg. 100, e tanti chilogrammi di seta può avere il mercante in conguaglio dei metri 80 panno.

Esempio II. — A e B convengono di barattare cera con pepe. A vende Cg. 30 cera per L. 40; e B Cg. 12 di pepe per L. 20. Volendo A dare a B Chilogrammi 130 di cera, quanti Chilogrammi di pepe potrà avere?

Si trovi quanto costeranno i Cg. 130 di cera, dicendo: se Cg. 30 di cera costano L. 40, Cg. 130 quanto costeranno? Eseguita la proporzione e avuto per quarto termine L. 173 $^1/_3$, si prosegue con dire: se con Lire 20 si hanno Cg. 12 di pepe, con L. 173 $^1/_3$ quanti se ne avranno? E si troveranno Cg. 104.

Esempio III. — Si baratta formaggio con lana. Il formaggio costa in contanti L. 52 per $^0/_0$; ed in baratto si computa a Lire 56; la lana costando in contante Lire 64 per $^0/_0$, quanto si potrà mettere in baratto col guadagno del 5 per $^0/_0$?

Si trovi primieramente quanto possono valutarsi ambedue i generi in baratto eguale, ed eccone la regola: se L. 52 in contante danno L. 56 in baratto, L. 64 in contanti che daranno in baratto? E si troverà che daranno L. 68 $^{12}/_{13}$. Dipoi si dica: se 100 danno 105 col guadagno, che daranno L. 68 $^{12}/_{13}$? Si avranno L. 72 $^{24}/_{65}$; tanto dovrà per $^0/_0$ valutarsi in baratto la lana per guadagnarvi secondo la data ragione.

Specie seconda.

232. *Esempio* I. — Pietro vuol barattare dell'olio con del vino che ha Giovanni. L'ettolitro dell'olio costa L. 147

in contanti e si pone L. 157,50 in baratto. Pietro esige da Giovanni il terzo in danaro, ed il restante in baratto di vino, e darebbe 22 ettolitri d'olio. L'ettolitro del vino costa in contanti L. 25. Si domanda quanto dovrà valutarsi il vino in baratto eguale, e qual somma di danaro e quanti ettolitri di vino Giovanni dovrà dare a Pietro?

Primieramente cerco il prezzo di un ettolitro di vino in baratto, e siccome si esige da Pietro il terzo in danari, perciò prendo il terzo delle L. 157,50 (prezzo di un ettolitro d'olio in baratto) ed ho L. 52,50, che sottraggo da L. 147 e da L. 157,50 ed ottengo 94,50 e 105; onde dico: se 94,50 in contanti danno in baratto 105, che daranno 25? E trovo L. 27,78 per il prezzo del vino in baratto.

Secondariamente cerco il prezzo totale dei 22 ettolitri d'olio a L. 157,50 e trovo L. 3465; ne prendo il terzo, ed ho L. 1155 che tante ne dovrà Pietro riscuotere da Giovanni.

In terzo luogo sottraggo L. 1155 da L. 3465; e la differenza L. 2310 determina gli ettolitri di vino che Giovanni deve dare a Pietro in baratto, dietro la proporzione $22{,}7777 : 1 :: 2310 : x = 83{,}16$. Dunque l'ettolitro del vino costerà in baratto L. 22,7777 e per El. 22 d'olio darà Giovanni a Pietro L. 1155 in danari e ettolitri 83 e litri 16 di vino.

Esempio II. — Domenico ha 16 metri di panno, che venderebbe in contanti L. 16 il metro; lo vorrebbe barattare in lana e seta, purchè gli venga valutato L. 20, e gli venga sborsato nell'atto un quinto del danaro. Il Chilogrammo della seta, che in contanti costa L. 24, si mette in baratto L. 27, e il centinaio della lana, che vale in contanti L. 40, si pone in baratto L. 58 $^1/_3$. Quanti Chilogrammi di seta, quante centinaia di lana, e quante lire avrà Domenico in eguale e giusto baratto dei metri 16 del panno?

Il prezzo dei metri 16 panno a Lire 20 è di Lire 320; prendo il quinto di questo prezzo ed ho 64, sottro 64 da L. 320, ed ho L. 256 per resto.

Perchè questo residuo del prezzo del panno sia conguagliato con i prezzi in baratto della seta e della lana, sommo i prezzi in baratto dell'una e dell'altra, ed ho 85 $^1/_3$, per cui diviso il suddetto resto 256, ottengo per quoziente 3, onde concludo che Cg. 3 di seta, e 3 centinaia di lana con L. 64 in danaro si baratteranno egualmente con i metri 16 di panno valutato in baratto a L. 20 il metro.

Specie terza.

233. *Esempio* I. — Francesco ha del grano, che in contanti venderebbe L. 14 l'ettolitro. Lo vuol barattare con orzo, nel qual caso valuterebbe il grano a L. 16, con accordare 5 mesi al pagamento. Antonio ha dell'orzo, che costerebbe in contanti L. 7 l'ettolitro; e richiesto da Francesco di venire al suddetto baratto, domanda quanto debba apprezzare in baratto il suo orzo, accordando 3 mesi di tempo al pagamento.

La differenza tra il prezzo del grano in contanti e in baratto è 2: ora se L. 14 in contanti in mesi 5 producono di guadagno L. 2, quanto ne produrranno L. 7 in mesi 3? Si troveranno centesimi 60, che aggiunti al prezzo dell'orzo in contanti danno L. 7,60; e tanto può valutarsi l'orzo in baratto.

Esempio II. — Due barattano grano ed orzo. Colui che ha l'orzo lo valuta in contanti L. 7 l'ettolitro, e in baratto L. 7,60, tempo al pagamento 3 mesi. L'altro che ha il grano, lo valuta in contanti L. 14 dando 5 mesi di tempo al pagamento. Quanto lo potrà apprezzare in baratto?

La differenza dei due prezzi dell'orzo è $^3/_5$ di lira; ora si dica: se L. 7 in 3 mesi danno $^3/_5$ di lira, che daranno L. 14 in 5 mesi? Si troverà L. 2, che aggiunte a L. 14 prezzo in contanti del grano, daranno L. 16 per il prezzo del medesimo in baratto. Ciò serve di riprova all'esempio antecedente.

Esempio III. — Due barattano grano ed orzo, quello

dell'orzo lo valuta in baratto L. 7,60, tempo al pagamento 3 mesi. Quello del grano lo apprezza in contanti L. 14 e in baratto L. 16, tempo al pagamento mesi 5; quanto sarà valutato l'orzo in contanti?

La differenza tra i due prezzi del grano è 2. Ora se L. 14 in mesi 5 danno 2, che darà L. 1 in mesi 3? Operando al solito si trova 0,0857, che aggiunto al capitale L. 1, dà L. 1,0857. Quindi si dica: L. 1,0857 proviene da L. 1 di capitale, L. 7,60 da qual capitale proverranno? Trovo x=L. 7 che è il prezzo in contanti dell'orzo. E ciò pure verifica i due esempi precedenti.

Esempio IV. — Due barattano grano ed orzo. Quello dell'orzo lo valuta in contanti L. 7 e in baratto L. 7,60, tempo al pagamento 3 mesi. Quello del grano lo valuta in contanti L. 14 e in baratto Lire 16: perchè il baratto sia giusto ed eguale, qual tempo dovrà questi assegnare al pagamento?

La differenza che passa tra i due prezzi dell'orzo è centesimi 60, del grano è 2. Se dunque L. 7 in 3 mesi danno di guadagno 0,60, in qual tempo L. 14 daranno 2 di guadagno?

Opero al solito, ed ho x=5 tempo che assegnerà quello del grano al pagamento: ciò novamente riprova i passati esempi.

DELLE REGOLE D'ALLIGAZIONE.

234. La regola d'*Alligazione* consiste in trovare 1.° Il prezzo o il valore medio, ossia prezzo dell'unità di una mescolanza di più cose differenti, delle quali son dati i prezzi e le quantità: 2.° In qual proporzione convenga prendere ciascuna delle cose mescolate, quando il loro prezzo è noto, ed è pure dato il prezzo medio della mescolanza: 3.° In qual proporzione egualmente bisogni prendere le altre cose mescolate, quando sia fissata la quantità di una di esse, e siano cogniti i prezzi di tutte ed il prezzo medio:

4.° In qual proporzione si debbano mescolare più cose, quando sia determinata la quantità della mescolanza, e sieno noti i loro prezzi ed il prezzo medio.

Il primo dei suddetti casi appartiene alla regola d'alligazione, che si chiama diretta; gli altri tre a quella che si dice indiretta. Esaminiamo ciascuno partitamente.

Caso primo.

235. *Esempio* I. — Si ha del grano a L. 28,25 l'ettolitro; del grano a L. 25; dell'orzo a L. 13,75; della vena a L. 9,60; delle fave a L. 15,35. — Si vuol fare una mescolanza con un ettolitro di ciascuna specie. A quanto si potrebbe vendere l'ettolitro della mescolanza?

Si sommano i prezzi di tutte le specie, e si divide la somma per il numero totale delle cose mescolate. Il quoziente darà il prezzo medio, o sia il valore dell'unità della mescolanza.

grano	a	L.	28,25
grano	a	»	25,00
orzo	a	»	13,75
vena	a	»	9,60
fave	a	»	15,35
Somma		L.	91,95

Essendo 5 le cose mescolate, divido per 5 la suddetta somma, ed ho lire 18,39 che è il prezzo medio; ossia il prezzo a cui può vendersi la mercanzia.

Osservazione. — Con tal metodo si trova il prezzo medio, o si fa il ragguaglio dei prezzi dei vari generi che si vendono in qualche piazza. Per esempio se si voglia sapere qual sia il prezzo del grano venduto in un mercato, basta sommare i vari prezzi, ai quali è stato venduto ciascun ettolitro, e dividerne la somma per il numero totale degli ettolitri: il quoziente darà il prezzo medio.

Esempio II. — Si vuol fare una campana con Eg. 390 di rame a 28 centesimi l'ettogrammo, e Eg. 110 di stagno a centesimi 38; quanto costerebbe l'ettogrammo non computando l'opera del fonditore?

È chiaro che Eg. 390 di rame a centesimi 28 costano L. 109,20 e che Eg. 110 di stagno a centesimi 38 costano L. 41,80. Sommo questi due prodotti e divido la somma L. 151,00 per 500 somma degli ettogrammi, trovo centesimi 30 $^1/_5$ prezzo di ciascun ettogrammo della mescolanza, ossia della campana.

La ragione delle suddette operazioni è evidente, poichè la somma delle unità mescolate deve stare al prezzo totale come un'unità al suo prezzo, ossia al prezzo medio.

Caso secondo.

236. *Esempio* I. — Un mercante di vino vorrebbe mescolare due vini, l'uno a 15 soldi, l'altro a 8 soldi il litro per aver del vino a 12 soldi. Quanto deve prenderne di ciascuna specie?

$$12 \begin{cases} 15 \ldots\ldots 4 \\ 8 \ldots\ldots 3 \end{cases}$$

Disposti i prezzi come sopra, prendo la differenza 3 fra 12 e 15 e la scrivo in faccia a 8, e la differenza 4 tra 12 e 8 che scrivo reciprocamente in faccia a 15, e concludo che tre litri di vino a 8 soldi mescolati con 4 a 15 faranno del vino a soldi 12. Infatti costando i tre primi 24 soldi, i quattro ultimi 60, la mescolanza che in tutto è di litri 7 costerà soldi 84, cioè a ragione di 12 soldi il litro.[1]

[1] È manifesto che essendo una delle quantità da mescolarsi più alta del prezzo medio, l'altra più bassa, il maggior costo dell'una dovrà esser compensato dal minor prezzo dell'altra; e che quanto il prezzo dell'una è maggiore e quello dell'altra minore del prezzo dato, tanto dovremo impiegar meno di quella e più di questa. Dunque le quantità da mescolarsi debbono essere reciprocamente proporzionali alle differenze dei loro prezzi dal medio, e possono per conseguenza anche eguagliarla.

Esempio II. — Ho dell'argento a L. 20 l'ettogrammo; ne ho dell'inferiore a L. 17,50 e del rame a L. 0,50; voglio formarne una lega di L. 19 l'ettogrammo, quanti ettogrammi si potrebbero mettere per ciascuna specie?

	prezzi	differenze
Prezzo medio L. 19	L. 20	18,50+1,50=20
	» 17,5 . . .	1 . . . 1
	» 0,5 . . .	1 . . . 1
	Somma	Eg. 22

Si dispongano come sopra i prezzi; si prendano le differenze fra il prezzo medio e i prezzi dati di ciascuna specie paragonati successivamente due per due col prezzo medio, osservando che dei due prezzi l'uno sia maggiore e l'altro minore del medio, e si segnino le differenze alternativamente in maniera che quella del numero maggiore resti in faccia al numero minore, e l'altra del numero minore resti in faccia al numero maggiore.

Così nel nostro caso paragono 20 e 0,5 col prezzo medio: la differenza che passa tra 20 e 19 è 1, che scrivo in faccia al 0,5; la differenza fra il 19 e 0,5 è 18,5 che scrivo in faccia al 20. Paragono poi 20 e 17,5 col prezzo medio; la differenza col 17,5 è 1,5 che segno in faccia al 20, e la differenza col 20 è 1 che segno in faccia al 17,5. Concludo dopo ciò che Eg. 20 d'argento a L. 20, Eg. 1 d'argento a L. 17,50 e Eg. 1 di rame a L. 0,50 formano una lega a L. 19 l'ettogrammo e che un ettogrammo di tal lega contiene $^{10}/_{11}$ d'argento del migliore, $^{1}/_{22}$ dell'inferiore e $^{1}/_{22}$ di rame, come infatti $\frac{10}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{22}=\frac{20}{22}+\frac{1}{22}+\frac{1}{22}=1$.[1]

[1] Nella pratica qui insegnata vien tacitamente supposto, che due delle tre materie e precisamente quelle di minor costo debbano esser mescolate in egual quantità. Tal condizione non entra veramente nello spirito del quesito, ma è per altro sempre lecita e serve a facilitare e ridurre a più semplici regole la soluzione. Frattanto è manifesto che essendo tre le

Osservazione. — Le suddette tre differenze 20, 1, 1 che indicano quante parti di ciascuna specie possono prendersi per far la mescolanza dei metalli del prezzo di L. 19 l'ettogrammo, non sono le sole che sciolgono il quesito. Duplicandole ancora e triplicandole ec. o dividendole per i medesimi numeri soddisfano al quesito.

Se si è bene operato deve verificarsi che la somma delle unità delle specie mescolate moltiplicate per il prezzo medio dev'essere eguale alla somma dei prodotti delle unità di ciascuna nel loro respettivo prezzo.

Ma nel caso superiore abbiamo $22\times19=418$ e $20\times20+1\times17,50+1\times0,50=418$: dunque l'operazione fu bene eseguita.

Caso terzo.

237. *Esempio*. — Con ettolitri 24 di grano a lire 28,75 l'ettolitro si vuol mescolare dell'orzo a L. 14, e della segale a L. 16,25, e fare un mescuglio che costi lire 28 l'ettolitro. Quanto se ne deve prendere delle ultime due specie?

materie da mescolarsi, l'ultime due posson sempre riguardarsi come costituenti una sola materia, il cui prezzo sarebbe il medio aritmetico o la semisomma dei respettivi prezzi di ciascheduno. In tal caso chiamate per maggior chiarezza x, y, z le tre materie, presi i numeri dell'esempio attuale, e ragionando secondo il principio esposto nel caso precedente (§ 236 nota 1) avremo la proporzione

$$x : z+y :: 19-\frac{17,5+0.5}{2} : 20-19$$

Ma per l'accennata condizione abbiamo $y=z$, dunque

$$x : 2z :: 19-\frac{17,5+0.5}{0,50} : 20-19$$

cioè (179) $x : z :: 2\times19-17,5-0,5 : 20-19$
ovvero $x : z :: 19-17,5+19-0,5 : 20-19$
ed anche $x : z :: 1,5+18,5 : 20-19$
d'onde $x : z :: 1,5+18,5 : 1$
perciò $x : z :: 20 : 1$
infine $x=20$, e $z=y=1$ secondo la regola.

Prezzo medio L. 28	Grano	L. 28,75 .	14+11,75=25,75
	Orzo	» 14,00	0,75
	Segale	» 16,25	0,75

Ottenute le differenze come sopra (236) si potrebbero prendere El. 25,75 di grano, litri 75 d'orzo ed altrettanto di segale, e si farebbe così una mescolanza al prezzo di L. 28 l'ettolitro: ma siccome sono determinati gli ettolitri 24 di grano, così El. 0,75 e El. 0,75 non sono i veri numeri: perciò dico: se con El. 25,75 sono necessari litri 75 d'orzo e 75 di segale, con ettolitri 24 di grano qual quantità proporzionale di orzo e di segale dovrà prendersi? Ciò si ottiene con la regola del tre.

$$\text{El. } 25{,}75 : \text{El. } 24 :: \begin{cases} \text{Lt. } 75 : x = \text{litri } 69{,}9 \\ \text{Lt. } 75 : x = \text{litri } 69{,}9 \end{cases}$$

Dunque mescolando con El. 24 di grano litri 69,9 d'orzo ed altrettanto di segale si ha quanto si richiede; e questi sono i soli numeri, che soddisfacciano alla richiesta, essendo determinata la quantità di una specie. — Può verificarsi l'operazione nella maniera esposta sopra (236).

Caso quarto.

238. *Esempio.* — Un cantiniere o vinaio ha del vino a L. 24 l'ettolitro, a L. 26 e a L. 35; in qual proporzione può mescolarlo per farne El. 150 da vendersi lire 30 l'ettolitro?

Si cerchi prima col metodo del caso secondo, esempio II, in qual proporzione debbono mescolarsi le tre qualità di vino, onde ne resulti un vino di L. 30 l'ettolitro, ed avremo

	prezzi	differenze
Prezzo medio L. 30	L. 24	5
	» 26	5
	» 35 . .	4+6=10

Risulterà cioè un vino a L. 30, mescolando ettolitri 5 a L. 24, altrettanto a L. 26, e El. a L. 35. Ma queste quantità non ammontano che a El. 20: onde per averne come si richiede 150 dovremo trascegliere tutte nella ragione di 20 : 150, il che otterremo al solito con le regole del tre, dicendo:

$$20 : 150 :: \left\{ \begin{array}{lr} 5 : x = \text{El.} & 37{,}50 \\ 5 : x = \text{»} & 37{,}50 \\ 10 : x = \text{»} & 75{,}00 \end{array} \right.$$

Somma . . . El. 150,00

Concludo che con El. 37,50 a L. 24, con El. 37,50 a L. 26, e con El. 75 a L. 35 si fa la mescolanza di El. 150 di vino che può vendersi a L. 30 l'ettolitro.

FONDI PUBBLICI.

239. Una delle maniere per contrarre imprestiti è quella di vendere delle *obbligazioni* o *titoli* coi quali il compratore esige da chi di ragione il fruttato di tutta la somma che esso ha, ovvero si suppone abbia sborsato. Tale è il metodo seguito dai Governi, dai Comuni, dalle Società e qualche volta anche dai privati.

Le obbligazioni poi, titoli o cartelle nelle quali un Governo si dichiara debitore del valore da esse rappresentato, costituiscono i *Fondi pubblici* e formano una vera *Rendita*, giacchè fruttano come qualunque altro capitale effettivo. Essa prende il nome di rendita *fluttuante* quando v'è unito l'obbligo di pagare il fruttato e renderne in un modo qualunque dentro un determinato tempo anche il capitale; e sono rendite *consolidate* o *iscritte* quelle in cui i capitali non si restituiscono mai, o si restituiscono dopo un tempo lontano ed indeterminato.

Gli interessi che si percepiscono per debiti contratti coll'emissione di cedole o titoli possono essere del 3, 4,

5 ec. ogni centinaio rappresentato dalle cedole medesime, per cui si ha la Rendita 3, la Rendita 4, la Rendita 5 ec. per %. Questi interessi vengono pagati di sei mesi in sei mesi a chiunque si presenti al Cassiere o Tesoriere della relativa rendita con l'obbligazione, quando essa sia *al portatore;* e solo a colui che v'è nominato come proprietario se *Nominativa.*

Generalmente nelle rendite fluttuanti per maggior semplicità nella riscossione dei frutti, il certificato od obbligazione è formato da due parti, una *principale* e l'altra *accessoria.* La principale non è altro che il vero titolo della rendita: l'accessoria forma il margine di questa, ed è composta da varie sezioni rettangolari in cui è segnata la somma degli interessi semestrali e il giorno da che essi cominciarono a decorrere. Ciascuna di tali sezioni, dette *Vaglia, Cedole, Stralci* e dai Francesi *Coupons,* può essere staccata dalla parte principale, e serve a presentarsi per la riscossione dei frutti sopra indicátivi, e più ancora i frutti di questi frutti se vengono richiesti qualche tempo dopo alla loro scadenza.

Nelle obbligazioni o titoli d'una rendita consolidata o fluttuante bisogna distinguere due valori; *il nominale,* che rappresenta la somma della quale chi ha creato la rendita garantisce il frutto del 3, 4, 5,... per %: il *reale* che rappresenta la somma la quale è stata sborsata la prima volta, o il *prezzo corrente* a cui presentemente si contrattano, essendo esse tra mercanti e capitalisti soggette, come qualunque altra operazione commerciale, ad acquisto o a cessione. Questo valore è per lo più minore del nominale, ossia è, come suol dirsi, *sotto alla pari,* e scema o cresce secondo le vicende politiche, la fiducia che ispira chi ha aperto la rendita o lo stato finanziario a cui si ritrova. Non è poi facile che il prezzo sia *alla pari*, vale a dire che il valor nominale eguagli il reale, e molto meno che questo sia maggiore di quello, cioè che il prezzo sia *sopra alla pari.*

I Capitali convertiti in rendita pubblica danno buonissimi interessi, perchè il frutto che si percepisce è sempre maggiore di quello fissato e che caratterizza la rendita: infatti si riscuote il 3, 4, 5 ec. non già sopra 100 lire, ma sopra 65, per esempio, se 65 sia il valore a cui è stata emessa la rendita, oppure il prezzo corrente al quale è stato comprato ciò che ha per valor nominale cento.

L'estinzione dei debiti fluttuanti si può fare in varie maniere: colla estrazione a sorte di alcune cartelle o titoli del debito da estinguersi; per cui i proprietari delle cartelle sortite ricevono il rimborso alla pari del capitale, che esse rappresentano; ovvero colla compra e successiva distruzione di titoli d'un valore determinato, per parte di chi ha contratto l'imprestito; al quale effetto sono assegnati alcuni fondi o rendite annue che costituiscono la *Cassa d'ammortizzazione* o *di estinzione*. Altre volte poi il Capitale diventa redimibile se oltre agli interessi si riceve ogni anno una somma che progressivamente lo distrugge.

Per le rendite consolidate e perpetue non vi sono casse d'ammortizzazione.

240. Quasi tutti gli stati d'Europa non che quelli dell'altre parti del mondo, hanno creato da un tempo più o meno lungo rendite che formano una massa assai considerevole di fondi pubblici. In Europa solamente ascendono oltre a 60 migliaia di milioni, e vi vanno sempre aumentando di modo che nel solo 1867 fu accresciuto il debito di L. 1 163 145 291.

I fondi pubblici del Governo Italiano nel 1866 ammontavano a 5 293 856 767 lire, portavano al bilancio un peso di L. 288 637 948 per rendite, premi e ammortizzazione, ed erano costituiti dai titoli delle seguenti rendite:

I. Rendita 3 per $^0/_0$ creata in occasione dell'imprestito di 40 milioni fatta colla Casa Rotschild di Parigi.

II. Rendita 5 per $^0/_0$ o Consolidato italiano.

III. Rendita delle Obbligazioni dello Stato al 4 per $^0/_0$ che è formata da titoli al portatore di L. 1000 l'uno, ed

ha oltre il frutto annuo la probabilità d'un premio che si suol dare ad alcune obbligazioni estratte a sorte ogni sei mesi.

IV. Obbligazioni Hambro al 5 per % rappresentanti l'imprestito di 90 milioni di lire italiane, contratto in lire sterline (L. 25,25 l'una) colla Casa Hambro di Londra. Questi titoli sono divisi nelle seguenti serie. Serie A di L. sterline 1000 per ciascuna cartella; Serie B di 500 L. sterline; Serie C di 100, e Serie D di 40.

V. I Buoni del Tesoro possono essere considerati come un'altra rendita, ma che però rappresenta imprestiti contratti provvisoriamente e ad interesse vario.

241. Veniamo ora ad esporre qualche esempio delle principali operazioni sui fondi pubblici.

Esempio I. — Pietro vuol acquistare L. 1425 di rendita 5 per % al prezzo corrente del 63,25: qual somma deve sborsare?

Poichè Pietro vuol comprare tanti titoli al 5 per % che gli rendano un fruttato di lire 1425; e poichè ciò che frutta 5 costa presentemente 63,25; la somma che frutterà 1425 sarà data dalla proporzione

$5 : 63,25 :: 1425 : x = 18026,25$ somma occorrente per la compra d'una rendita 5 per % di L. 1425 supposto il corso 63,25.

Esempio II. — Ho intenzione di rinvestire in cartelle della rendita 5 per % che si trova al basso corso di 59,25, la somma di L. 1000 che m'ha restituito un mio creditore. Che rendita mi procuro?

Se con 59,25 acquisto un capitale che frutta lire 5, con 1000 n'acquisterò uno il cui frutto o rendita sarà dato dalla proporzione

$59,25 : 5 :: 1000 : x = 84,39$ frutto datomi dalla somma in tal maniera investita.

Esempio III. — Lire 300 di rendita 4 per % mi costano L. 5250: si chiede a qual corso l'ho acquistata?

Domandandosi il valore effettivo a cui l'obbligazione fu

comprata, si cerca qual somma in tal epoca fruttava 4 lire: ma d'altronde si sa che 5250 fruttava 300: perciò

Se $300 : 5250 :: 4 : x = 70$ corso cercato.

Esempio IV. — A che ragione s'impiega il danaro facendo acquisto di rendita 5 per % al corso del 60?

In questo caso il fruttato 5 non è del 100 ma del valore reale 60 e quindi

Se $60 : 5 :: 100 : x = 8\,^1/_3$ ragione a cui impiego il danaro.

Esempio V. — A non vuol comprare cartelle del Consolidato italiano finchè non rendano un frutto effettivo del 8 per %: a qual corso le dovrà acquistare?

Questo quesito si riduce all'altro: se 8 deve essere la rendita del nominale 100, la rendita 5 da che capitale effettivo sarà data? quindi

Se $8 : 100 :: 5 : x = 62\,^1/_2$ corso a cui si dovrà acquistare il Consolidato.

Esempio VI. — Il Governo ha emesso all'80 una rendita 5 per % che ascende a 2000000; quanto riceve in contanti?

Dal quesito si rileva che il Governo richiede 80 lire in luogo di 100 e che di queste 80 lire dà il fruttato 5 come se fossero un centinaio. Si dirà quindi se 80 lire danno di frutto 5, quanto daranno L. 2000000? Il resultato l'avremo dalla proporzione

$5 : 80 :: 2000000 : x = 32000000$

Se poi la rendita fosse emessa alla pari avremmo

$5 : 100 :: 2000000 : x = 40000000.$

APPENDICE ALLE REGOLE D'INTERESSE SEMPLICE E COMPOSTO.

242. Nel § 198 e seguenti abbiamo percorsi vari casi d'interesse sì semplice come composto, abbiamo date le soluzioni dei corrispondenti quesiti, secondo che potevano ottenersi con la via delle proporzioni e delle false posizioni, o degli altri metodi puramente aritmetici. Ma perchè

non manchi di tutta la possibile estensione questo sì importante argomento, si è creduto bene di aggiungere qui nuove regole spettanti in parte ai casi medesimi, e in parte ancora a casi diversi, le quali più derivando dalle formule d'algebra che dai principj della volgare Aritmetica, non potevano, senza offesa della necessaria regolarità, essere incorporate con le precedenti.

Tempo nel quale si raddoppia una somma posta ad interesse semplice.

243. *Esempio.* — Ho posto ad interesse semplice del 6 per % Scudi 800. In quanto tempo si raddoppierà il mio capitale?

Ecco la regola: si divide il 100 per il frutto di un centinaio, ed il quoziente dà il tempo cercato.

Nel nostro caso si parta 100 per 6, e si avrà per quoziente anni 16, mesi 8, ed in tal tempo diverrà duplo il suddetto capitale di Scudi 800; ed egualmente qualunque altro capitale alla stessa ragione.

Osservazione. — Se si voglia trovare in quanto tempo si guadagnerà la metà, il terzo, il quarto ec. si prende la metà, il terzo, il quarto ec. del tempo che è necessario perchè divenga duplo il dato capitale: i respettivi quozienti determineranno il tempo nel quale si sarà guadagnata la metà, il terzo, il quarto ec. del capitale messo ad interesse semplice. Così nel suddetto esempio, diviso il tempo, cioè anni 16 e mesi 8, per 2, abbiamo anni 8, mesi 4; e al fine di un tal tempo si sarà guadagnato per mezzo dei frutti la metà del capitale, e così del rimanente.

Tempo nel quale si raddoppia la somma posta ad interesse composto.

244. *Esempio.* — Tizio dette a frutto e rifrutto del 7 per % la somma di lire 350. Vorrebbe sapere in quanto tempo diverrà doppia tra utili e capitale?

Quando siasi trovato anche in questo caso il tempo, nel quale si raddoppia il 100, si sarà trovato egualmente per qualunque altra somma alla stessa ragione.

In Aritmetica pratica si assegna questa regola: si divida sempre e in qualunque caso il 72 per il dato frutto di un centinaio. Il quoto, trascurato l'avanzo, darà per approssimazione gli anni nei quali diverrà duplo il capitale ec.

Abbiamo nel presente esempio l'interesse di 7 per $^0/_0$, divido per 7 il 72 ed ho 10 anni. Per trovare il tempo preciso opero così: merito L. 100 a 7 per $^0/_0$ a capo d'anno per 10 anni, ed ho, per mezzo della Tavola XXV, L. 196,715135. Vedo che questa somma è minore di L. 200, ossia meno del dovere. Cerco perciò che cosa divengono L. 100 in 11 anni alla stessa ragione, e trovo nella medesima tavola lire 210,485194, la qual somma superando 200 è maggiore del dovere. Da questa somma sottraggo l'altra, ed ho L. 13,770059 per differenza che mi dà il guadagno di un anno. Cerco pure la differenza che passa tra L. 196,715135 e L. 200 che è il capitale raddoppiato, ed ho L. 3,284865. Ora dico: se L. 13,770059 si guadagnano in un anno, cioè in giorni 365, in quanti giorni si guadagneranno L. 3,284865? Trovo che si guadagneranno in giorni 88 con piccolissima differenza in meno. Dunque concludo che in anni 10, mesi 2, e giorni 28 diverrà doppio il suddetto capitale di L. 350.

Osservazione. — Il numero 72 che si è impiegato in principio non è abbastanza esatto per i frutti nè troppo bassi, nè troppo alti; sarebbe enormemente fallace se si trattasse del 12, del 20, del 30 per $^0/_0$ ec., come ancora del 2, del 3 ec.

Trovare una somma annua che consumi in un dato numero di anni un capitale posto ad interesse semplice, insieme con i suoi frutti.

245. Alla pagina 176 Esempio 7 fu già insegnato a risolvere questo genere di quesiti con la doppia falsa posizione. Ma ecco una nuova regola, la quale quando si sia bene appresa gioverà a giunger con assai più speditezza al medesimo risultamento.

1.° Si faccia del frutto di un'unità accresciuto di 1 la potenza corrispondente al numero degli anni, e si moltiplichi per il capitale e per il frutto di un'unità: 2.° si divida un tal prodotto per la detta stessa potenza diminuita di 1. Il quoziente darà la somma annua, che consuma in un corso di anni il capitale ed i frutti.

Esempio I. — Ho posto ad interesse semplice di 5 per $\%$ Lire 1500, voglio consumare in 4 anni sorte e frutti spendendo annualmente un' egual somma di denaro. Si assegni questa somma? Abbiamo $x=\frac{1500\times0{,}05(1{,}05)^4}{(1{,}05)^4-1}$......... $=\frac{75\times1{,}21550625}{1{,}21550625-1}=\frac{91{,}16296875}{0{,}21550625}$: fatta la divisione si trova per quoziente L. 423,02 circa. Dunque spendendo annualmente una tal somma saranno consumati ne' quattr'anni il capitale ed i frutti.

Esempio II. — Francesco prende a pigione una casa per due anni, e dà anticipatamente al padrone Sc. 36 $^2/_5$ con la condizione che gli fruttino 20 per $\%$. È contento il padrone. Si domanda quanto importa la pigione di un anno?

Riducendosi il quesito a trovare una somma annua, che in due anni consumi Scudi 36 $^2/_5$ posti all'interesse semplice del 20 per $\%$ ed insieme i loro frutti, si ha perciò

$x=\frac{36^2/_3 \times 0{,}2\ (1{,}2)^2}{(1{,}2)^2-1}=\frac{^{22}/_3 \times 1{,}44}{1{,}44-1}=\frac{31{,}68}{1{,}32}=24$. Dunque la pigione importa Sc. 24 per anno.

Esempio III. — Domenico dell'età di 70 anni dà L. 5000 a vitalizio. Essendo probabile che egli possa campare anche per 8 anni, qual somma gli si dovrà dare annualmente nell'ipotesi che il denaro s'impieghi all'interesse semplice di 6 per %?

Qui pure si cerca una somma annua, che in 8 anni consumi sorte e frutti. Dunque si ha $x=\frac{5000 \times 0{,}06(1{,}06)^8}{(1{,}06)^8-1}$.....
$=\frac{300 \times 1{,}5938480745}{1{,}5938480745-1}=\frac{478{,}154422350}{0{,}5938480745}$; fatta la divisione si trova $x=$L. 805,18 in circa, che è la somma che dovrà darsi in ciascun anno a Domenico. Onde se L. 5000 fruttano annualmente a Domenico L. 805,18, egli avrà un'entrata come se avesse impiegato il suo denaro a vitalizio al 16 $^1/_9$ per % l'anno.

Trovare un capitale, che in un numero di anni vien saldato insieme coi suoi frutti per mezzo di una somma eguale, che si paga annualmente.

246. Ecco la regola: 1.° Si divida la somma annua per il frutto di un'unità: 2.° si divida la medesima somma annua per il frutto di unità moltiplicato per la potenza del frutto di un'unità accresciuta di 1 corrispondente al numero degli anni: 3.° dal quoziente della prima divisione si sottragga il quoziente dell'altra. La differenza determina il capitale che si cerca.

Esempio. — Antonio pagando ogni anno L. 3000 estinse in 6 anni un censo che aveva al 5 per %. Qual era la somma a censo?

Si ha $x=\frac{3000}{0{,}05}-\frac{3000}{0{,}05(1{,}05)^6}=\frac{3000}{0{,}05}-\frac{3000}{0{,}05 \times 1{,}340096}=$.......

L. 15227,09 in circa; ed è questa la somma che Antonio aveva a censo.

Trovare il tempo nel quale si consuma una data somma ed i suoi frutti per mezzo di pagamenti di un tanto per anno.

247. Dalla soluzione dei seguenti esempi apprenderete la regola, che si assegna dagli Aritmetici, che è molto lunga e non determina il tempo che per approssimazione.

Esempio I. — Pagando annualmente lire 400 per la somma di L. 1000, che io tengo all'interesse di 5 per %, in quanto tempo salderò il mio debito?

Cerco col solito metodo (§ 199), che cosa divengano L. 1000 al 5 per % in un anno, e trovo L. 1050. Da queste sottraggo lire 400, ed ho per residuo L. 650. Merito alla stessa ragione L. 650 per un anno, ed ottengo L. 682,50, dalle quali sottratte L. 400 ho per resto L. 282,50. Fin qui essendo due le sottrazioni, e dall'ultimo residuo non potendo sottrarre le solite L. 400, ne concludo intanto che il tempo in parte è due anni.

Quindi trovo per un anno il frutto alla data ragione delle L. 282,50 rimaste ed ho L. 14,125. Sottraggo questo frutto da L. 400, e restano L. 385,875. Ora dico: se L. 385,875 senza il frutto di un anno portano 12 mesi, L. 282,50 qual tempo daranno? Fatte le consuete operazioni, trovo mesi 8, giorni 23 ed ore 13 $^1/_3$ in circa. Dunque in anni 2, mesi 8, giorni 23 ed ore 13 $^1/_3$ salderò il mio debito.

Esempio II. — Francesco prende a pigione una casa, e nell'entrarvi paga anticipatamente al padrone L. 200 con patto, che gli fruttino il 10 per % l'anno, e dal capitale e frutti si levino al fine di ciascun anno L. 60 per pigione: per quanto tempo potrà ritenere la casa?

Cerco che cosa diventano L. 200 dopo un anno alla ragione del 10 per %, e trovo L. 220, da cui sottro L. 60.

Merito di nuovo il residuo L. 160 per un anno, e da L. 176 tolgo L. 60, e sul resto L. 116 opero nella stessa maniera e così fino all'anno quarto, dopo del quale mi avanzano L. 14,36.

Cerco di quest' avanzo il frutto di un anno, ed ho L. 1,436 che sottraggo da 60, ed ho per resto L. 58,564. Perciò se con L. 58,564 si tiene la casa per 12 mesi, con L. 14,36 per quanti mesi si terrà? Ho per resultamento mesi 2, giorni 28, ore 6 $\frac{7962}{14641}$ con qualche differenza in meno. Dunque Francesco terrà la casa anni 4, mesi 2, giorni 28, ore 6 in circa.

TAVOLA

Del Ragguaglio esatto di quello che dà per °/₀ lo Spedale di Santa Maria Nuova di Firenze sopra i vitalizi, e scala della vita probabile dell'uomo.

Età anni		Rendita per °/₀	Vita probabile
da 20	a 25	5,20	30
25	30	5,60	28
30	35	6,00	25
35	40	6,40	22
40	45	6,80	20
45	50	7,20	15
50	55	7,60	10
55	60	8,00	8
60	65	8,80	7
65	70	9,60	5

Da 70 anni in là, si dà una discrezione, non oltrepassando il 9 $^{3}/_{5}$, 10 $^{2}/_{5}$, 11 $^{1}/_{5}$ per °/₀ e per anno.

TAVOLA

Che determina la durata probabile della vita e Pensione vitalizia annua per un Capitale di 100 col frutto al 5 o al 6 per %.[1]

ETÀ ANNI	VITA PROBABILE		RENDITA VITALIZIA DEL CAPITALE 100		ETÀ ANNI	VITA PROBABILE		RENDITA VITALIZIA DEL CAPITALE 100	
	anni	mesi	all'interesse del 5	all'interesse del 6		anni	mesi	all'interesse del 5	all'interesse del 6
30	28	—	6,7123	7,4593	56	13	5	10,4058	11,0580
32	26	11	6,8392	7,5791	58	12	5	11,1102	11,7561
34	25	7	7,0120	7,7446	60	11	1	11,9690	12,6095
36	24	5	7,1812	7,9047	62	10	—	12,9505	13,5949
38	23	3	7,3698	8,0853	64	9	—	14,0690	14,7022
40	22	1	7,5807	8,2887	66	8	—	15,4722	16,1044
42	21	6	7,8171	8,5173	68	7	—	17,2820	17,9121
44	19	9	8,0832	8,7377	70	6	2	19,2343	19,8665
46	18	9	8,3361	9,0260	72	5	4	21,8037	22,4588
48	17	8	8,6539	9,3324	74	4	9	24,1506	24,7198
50	16	7	9,0111	9,6826	76	4	3	26,6732	27,3209
52	15	6	9,4154	10,0859	78	3	11	28,7324	29,3898
54	14	6	9,8568	10,5155	80	3	7	31,1248	31,7841

[1] Si è creduto bene di riprodurre anche questa tavola del Buffon, perchè è presentemente la migliore e la più usata.

TAVOLA

Che determina ciò che diviene un' unità posta a frutto e rifrutto di 1 fino a 10 $^3/_4$ per cento inclusivamente per il corso di 20 anni, con otto decimali.

Anni	I. frutto di 1 per 100	Anni	II. frutto di 1 $^1/_4$ per 100	Anni	III. frutto di 1 $^1/_2$ per 100	Anni	IV. frutto di 1 $^3/_4$ per 100
1	1,01	1	1,0125	1	1,015	1	1,0175
2	1,0201	2	1,02515625	2	1,030225	2	1,03530625
3	1,030301	3	1,03797070	3	1,04567837	3	1,05342411
4	1,04060401	4	1,05094534	4	1,06136355	4	1,07185903
5	1,05101005	5	1,06408215	5	1,07728400	5	1,09061656
6	1,06152015	6	1,07738318	6	1,09344326	6	1,10970235
7	1,07213535	7	1,09085047	7	1,10984491	7	1,12912214
8	1,08285670	8	1,10448610	8	1,12649259	8	1,14888178
9	1,09368527	9	1,11829218	9	1,14338990	9	1,16788721
10	1,10462212	10	1,13227083	10	1,16054083	10	1,18832524
11	1,11566834	11	1,14642421	11	1,17794894	11	1.30912093
12	1,12682503	12	1,16075452	12	1,19561817	12	1,23028055
13	1,13809328	13	1,17526395	13	1,21355244	13	1,25181046
14	1,14947421	14	1,19005475	14	1,23175573	14	1,27371714
15	1,16096895	15	1,20493043	15	1,25023207	15	1,29600719
16	1,17257864	16	1,21999206	16	1,26898555	16	1,31868732
17	1,18430443	17	1,23524196	17	1,28802033	17	1,34166434
18	1,19614747	18	1,25068249	18	1,30734064	18	1,36524522
19	1,20810895	19	1,26631602	19	1,32695075	19	1,38913701
20	1,22019004	20	1,28214497	20	1,34685501	20	1,41344691

Anni	V. frutto di 2 per 100	Anni	VI. frutto di 2 1/4 per 100	Anni	VII. frutto di 2 1/2 per 100	Anni	VIII. frutto di 2 3/4 per 100
1	1,02	1	1,0225	1	1,025	1	1,0275
2	1,0404	2	1,04550625	2	1,050625	2	1,05575625
3	1,061208	3	1,06903014	3	1,07689062	3	1,08478955
4	1,08243216	4	1,09308332	4	1,10381289	4	1,11462126
5	1,10408080	5	1,11767769	5	1,13140841	5	1,14027334
6	1,12616242	6	1,14282544	6	1,15969362	6	1,17676836
7	1,14868567	7	1,16853901	7	1,18868596	7	1,20912949
8	1,17165938	8	1,19483114	8	1,21840311	8	1,24238055
9	1,19509257	9	1,22171484	9	1,24886319	9	1,27654602
10	1,21899442	10	1,24920343	10	1,28008476	10	1,31165103
11	1,24337431	11	1,27731050	11	1,31208688	11	1,34772144
12	1,26824179	12	1,30604999	12	1,34488906	12	1,38478377
13	1,29360663	13	1,33543611	13	1,37851128	13	1,42286483
14	1,31947876	14	1,36548343	14	1,41297407	14	1,46199361
15	1,34586834	15	1,39620680	15	1,44829842	15	1,50219843
16	1,37278570	16	1,42762146	16	1,48450588	16	1,54350889
17	1,40024142	17	1,45974294	17	1,52161853	17	1,58595539
18	1,42824625	18	1,49258716	18	1,55965899	18	1,62956916
19	1,45681117	19	1,52617037	19	1,59865046	19	1,67438231
20	1,48594740	20	1,56050920	20	1,63861672	20	1,72042783

Anni	IX. frutto di 3 per 100	Anni	X. frutto di 3 1/4 per 100	Anni	XI. frutto di 3 1/2 per 100	Anni	XII. frutto di 3 3/4 per 100
1	1,03	1	1,0325	1	1,035	1	1,0375
2	1,0609	2	1,06605625	2	1,071225	2	1,07640625
3	1,092727	3	1,10070308	3	1,10871779	3	1,11677148
4	1,12550881	4	1,13647593	4	1,14752300	4	1,15865041
5	1,15927407	5	1,17341140	5	1,18768631	5	1,20209980
6	1,19405230	6	1,21154727	6	1,22925533	6	1,24717854
7	1,22987386	7	1,25092255	7	1,27227926	7	1,29394774
8	1,26677008	8	1,29157753	8	1,31680904	8	1,34247078

9	1,30477332	9	1,33355380	9	1,36289735	9	1,39281343
10	1,34391638	10	1,37689430	10	1,41059876	10	1,44504393
11	1,38423387	11	1,42164337	11	1,45996972	11	1,49923308
12	1,42576089	12	1,46784678	12	1,51106806	12	1,55545432
13	1,46853371	13	1,51555180	13	1,56395606	13	1,61378386
14	1,51258972	14	1,56480723	14	1,61869452	14	1,67430075
15	1,55796742	15	1,61566347	15	1,67534883	15	1,73708703
16	1,60470644	16	1,66817253	16	1,73398604	16	1,80222780
17	1,65284763	17	1,72238814	17	1,79467555	17	1,86991134
18	1,70243306	18	1,77836575	18	1,85748919	17	1,94003302
19	1,75050605	19	1,83616264	19	1,92250132	19	2,01278425
20	1,80611123	20	1,89583792	20	1,98978886	20	2,08826366

	XIII.		XIV.		XV.		XVI.
Anni	frutto di 4 per 100	Anni	frutto di 4 $^1/_4$ per 100	Anni	frutto di 4 $^1/_2$ per 100	Anni	frutto di 4 $^3/_4$ per 100
1	1,04	1	1,0425	1	1,045	1	1,0475
2	1,0816	2	1,08680625	2	1,092025	2	1,09725625
3	1,124864	3	1,13299552	3	1,14116612	3	1,14937592
4	1,16985856	4	1,18114782	4	1,19251860	4	1,20397128
5	1,21665290	5	1,23134661	5	1,24618194	5	1,26125991
6	1,26531902	6	1,28367884	6	1,30226012	6	1,32166501
7	1,31593178	7	1,33823519	7	1,36086183	7	1,38381560
8	1,36857905	8	1,39511019	8	1,42210061	8	1,44954684
9	1,42331181	9	1,45440237	9	1,48609514	9	1,51840031
10	1,48024428	10	1,51621447	10	1,55296942	10	1,59052433
11	1,53945406	11	1,58065358	11	1,62285305	11	1,66607423
12	1,60103222	12	1,64783136	12	1,69588143	12	1,74521276
13	1,66307351	13	1,71786419	13	1,77219610	13	1,82811036
14	1,73167645	14	1,79087342	14	1,85194492	14	1,91494561
15	1,80094350	15	1,86698554	15	1,93528244	15	2,00590552
16	1,87298124	16	1,94633243	16	2,02237015	16	2,10118604
17	1,94790049	17	2,02905156	17	2,11337681	17	2,20099237
18	2,02581651	18	2,11528625	18	2,20847876	18	2,30553951
19	2,10684917	19	2,20518591	19	2,30780031	19	2,41505264
20	2,19112314	20	2,29890631	20	2,41171402	20	2,52976764

Anni	XVII. frutto di 5 per 100	Anni	XVIII. frutto di 5 $^1/_4$ per 100	Anni	XIX. frutto di 5 $^1/_2$ per 100	Anni	XX. frutto di 5 $^3/_4$ per 100
1	1,05	1	1,0525	1	1,055	1	1,10575
2	1,1025	2	1,10775625	2	1,113025	2	1,11830635
3	1,157625	3	1,16591345	3	1,17424137	3	1,18260886
4	1,21550625	4	1.22712391	4	1,23882465	4	1,25060887
5	2,27628156	5	1,29154691	5	1,30696001	5	1,32251888
6	1,34009564	6	1,35935313	6	1,37884281	6	1,39856371
7	1,40710042	7	1,43071917	7	1,45467916	7	1,47898112
8	1,47745544	8	1,50583192	8	1,53468651	8	1,56402254
9	1,55132821	9	1,58488810	9	1,61909427	9	1,65395384
10	1,62889463	10	1,66809472	10	1,70814446	10	1,74905618
11	1,71033936	11	1,75566970	11	1,80209240	11	1,84962691
12	1,79585632	12	1,84784235	12	1,90120748	12	1,90598046
13	1,88564914	13	1,94485408	13	2,00577390	13	1,06844934
14	1,97993160	14	2,04695892	14	2,11609145	14	2,18738518
15	2,07892818	15	2,15442426	15	2,23247645	15	2,31315982
16	2,18287459	16	2,26753153	16	2,35526266	16	2,44616651
17	2,29201832	17	2,38657694	17	2,23247649	17	2,58682109
18	2,40661923	18	2,51187223	18	2,35526270	18	2,73556329
19	2,52695019	19	2,64374552	19	2,48480215	19	2,89285818
20	2,65329770	20	2,78254216	20	2,62146626	20	3,05919753

Anni	XXI. frutto di 6 per 100	Anni	XXII. frutto di 6 $^1/_4$ per 100	Anni	XXIII. frutto di 6 $^1/_2$ per 100	Anni	XXIV. frutto di 6 $^3/_4$ per 100
1	1,06	1	1,0625	1	1,065	1	1,0675
2	1,1236	2	1,12890625	2	1,134225	2	1,13955625
3	1,191016	3	1,19946289	3	1,20794962	3	1,21647630
4	1,26247696	4	1,27442932	4	1,28646635	4	1,29858845
5	1,33822558	5	1,35408115	5	1,37008660	5	1,38624317
6	1,41851911	6	1,43871122	6	1,45914230	6	1,47981458
7	1,50363026	7	1,52863067	7	1,55398655	7	1,57970206
8	1,59084807	8	1,62417009	8	1,65499567	8	1,68633195

9	1,68947896	9	1,72568072	9	1,76257039	9	1,80015926
10	1,79084770	10	1,83353576	10	1,87713746	10	1,92167001
11	1,89829856	11	1,94813176	11	1,99915140	11	2,05138274
12	2,01219647	12	2,06988999	12	2,12909624	12	2,18985107
13	2,13292826	13	2,19925812	13	2,26748750	13	2,33766392
14	2,26090395	14	2,33671175	14	2,41487418	14	2,48475336
15	2,39655819	15	2,48275623	15	2,57184101	15	2,65230625
16	2,54035168	16	2,63792850	16	2,73901067	16	2,83155042
17	2,69277278	17	2,80279903	17	2,91704636	17	3,02268007
18	2,85433915	18	2,97797397	18	3,10665438	18	3,22671098
19	3,02559950	19	3,16409734	19	3,30858691	19	3,44451397
20	3,20713547	20	3,36185343	20	3,52364506	20	3,67701866

	XXV.		XXVI.		XXVII.		XXVIII.
Anni.	frutto di 7 per 100	Anni.	frutto di 7 1/4 per 100	Anni.	frutto di 7 1/2 per 100	Anni.	frutto di 7 3/4 per 100
1	1,07	1	1,0725	1	1,075	1	1,0775
2	1,1449	2	1,15025625	2	1,155625	2	1,16100625
3	1,225043	3	1,23364983	3	1,24229687	3	1,25098423
4	1,31079601	4	1,32308944	4	1,33546914	4	1,34793551
5	1,40255173	5	1,41901343	5	1,43562933	5	1,45240051
6	1,50073035	6	1,52189190	6	1,54330153	6	1,56496155
7	1,60578148	7	1,63222906	7	1,65904914	7	1,68624607
8	1,71818618	8	1,75056567	8	1,78447783	8	1,81693014
9	1,83845921	9	1,87748168	9	1,91831366	9	1,95774223
10	1,96715136	10	2,01359910	10	2,06218719	10	2,10946725
11	2,10485195	11	2,15958504	11	2,21685123	11	2,27295097
12	2,25219159	12	2,31615495	12	2,38311507	12	2,44910467
13	2,40984500	13	2,48407618	13	2,56041307	13	2,63891028
14	2,57853415	14	2,66417171	14	2,75244405	14	2,84342582
15	2,75903164	15	2,85732416	15	2,95887736	15	3,06379133
16	2,95216375	16	3,06448016	16	3,18079316	16	3,30123515
17	3,15881521	17	3,28665497	17	3,41935265	17	3,55708087
18	3,37993228	18	3,52483745	18	3,67580409	18	3,83235464
19	3,61652753	19	3,78049542	19	4,95148940	19	4,12979312
20	3,86968446	20	4,05458134	20	4,24785111	20	4,44985209

Anni.	XXIX. frutto di 8 per 100	Anni.	XXX. frutto di 8 $^{1}/_{4}$ per 100	Anni.	XXXI. frutto di 8 $^{1}/_{2}$ per 100	Anni.	XXXII. frutto di 8 $^{3}/_{4}$ per 100
1	1,08	1	1,0825	1	1,085	1	1,0875
2	1,1664	2	1,17180625	2	1,177225	2	1,18265625
3	1,259712	3	1,26848027	3	1,27728912	3	1,28613867
4	1,36048896	4	1,37312989	4	1,38585870	4	1,39867581
5	1,46931808	5	1,48641310	5	1,50365669	5	1,52105994
6	1,58687432	6	1,60904218	6	1,63146751	6	1,65415268
7	1,71382427	7	1,74178816	7	1,77014225	7	1,79889104
8	1,85093021	8	1,88548569	8	1,92060434	8	1,95629401
9	1,99900463	9	2,04103826	9	2,08385571	9	2,12746973
10	2,15892500	10	2,20942391	10	2,26098344	10	2,31362333
11	2,33163900	11	2.39170139	11	2,45316703	11	2,51606538
12	2,51847012	12	2,58901675	12	2,66168623	12	2,73623110
13	2,71962372	13	2,80261063	13	2,88792956	13	3,97565132
14	2,93719362	14	3,03382601	14	3.13340358	14	3,23602081
15	3,17216911	15	3,28411666	15	3,39974288	15	3,51917263
16	3,42594264	16	3,55505628	16	3,68872102	16	4,82710024
17	3,70001800	17	3,84834842	17	4,00226231	17	4,16197151
18	3,99601950	18	4.16583717	18	4,34245461	18	4,52614402
19	4,31570106	19	4,50951873	19	4,71156325	19	4,92218162
20	4,66095714	20	4,88155403	20	5,11201613	20	5,35287251

Anni.	XXXIII. frutto di 9 per 100	Anni.	XXXIV. frutto di 9 $^{1}/_{4}$ per 100	Anni.	XXXV. frutto di 9 $^{1}/_{2}$ per 100	Anni.	XXXVI. frutto di 9 $^{3}/_{4}$ per 100
1	.1,09	1	1,0925	1	1,095	1	1,0975
2	1,1881	2	1,19355625	2	1,199025	2	1,20450625
3	1,295029	3	1,30396020	3	1,31293237	3	1,32194561
4	1,41158161	4	1,42457652	4	1,43766095	4	1,45083531
5	1,53862395	5	1,55634985	5	1,57423874	5	1,59229175
6	1,67710011	6	1,70031221	6	1,72379142	6	1,74754019
7	1,82803912	7	1,81759109	7	1,88755161	7	1,91792536
8	1,99256264	8	2,02941827	8	2,06689901	8	2,10492308

9	2,17189328	9	2,21713946	9	2,26322156	9	2,31015308
10	2,36736367	10	2,42222485	10	2,47822761	10	2,53539301
11	2,58042640	11	2,64628066	11	2,71365924	11	2,78259383
12	2,81266478	12	2,80106162	12	2,97145686	12	3,05389673
13	3,06580461	13	3,15048482	13	3,25374526	13	3,35165166
14	3,34172703	14	3,45064466	14	3,49285106	14	3,67843770
15	3,64248246	15	3,76982929	15	3,90132191	15	4,03708537
16	3,97030588	16	4,11853850	16	4.27194849	16	4,43070120
17	4,32763341	17	4,49950332	17	4,67778251	17	4,86269456
18	4,71712042	18	4,91570737	18	5,12217184	18	5,33680728
19	5,14166125	19	5.37041070	19	5,60877817	19	5,85714600
20	5,60441077	20	5,86717326	20	6,14161210	20	6,42821773

	XXXVII.		XXXVIII.		XXXIX.		XL.
Anni.	frutto di 10 per 100	Anni.	frutto di 10 1/4 per 100	Anni.	frutto di 10 1/2 per 100	Anni.	frutto di 10 3/4 per 100
1	1,1	1	1.1025	1	1,105	1	1,1075
2	1,21	2	1,21550625	2	1,221025	2	1,22655625
3	1,331	3	1,34009564	3	1,34923263	3	1,35841105
4	1,4641	4	1,47745544	4	1,49090205	4	1,50444023
5	1,61051	5	1,62889463	5	1,64744677	5	1,66616756
6	1,781561	6	1,79585633	6	1,82042868	6	1,45628057
7	1,9487171	7	1,97993160	7	2,01157369	7	2,04364823
8	2,14358881	8	2,18287459	8	2,22278892	8	2,26334042
9	2,35794769	9	2,40661923	9	2,45618176	9	2,50664951
10	2,59374240	10	2,26532977	10	2,71408085	10	2,77611434
11	2,85311671	11	2,92526073	11	2,99905933	11	3,07454663
12	3,13842838	12	3,22509994	12	3,31396056	12	3,40506039
13	3,45227121	13	3,55567269	13	3,66192642	13	3,77110438
14	3,79749833	14	3,92012914	14	4,04642870	14	4,17649810
15	4,17724817	15	4,32194237	15	4,47130371	15	4,62547165
16	4,59497299	16	4,76494947	16	4,94079060	16	5,12270985
17	5,05447020	17	5.25334797	17	5,45957362	17	5,67340116
18	5,55991731	18	5,79181613	18	6,03282884	18	6,28329179
19	6,11590904	19	6,38547729	19	6,66627587	19	6,95874566
20	6,72749995	20	7,03998871	20	7,36623484	20	7,70681081

TAVOLA

Che determina il tempo nel quale un capitale posto a frutto e rifrutto di 1 fino a 10 $^3/_4$ per cento diviene duplo e triplo.

FRUTTO PER CENTO		UN CAPITALE DIVENTA DUPLO IN			FRUTTO PER CENTO		UN CAPITALE DIVENTA TRIPLO IN		
		anni	mesi	gior.			anni	mesi	gior.
1,00	. . .	69	7	27	1,00	. . .	100	4	27
1,25	ossia $^1/_4$	55	9	17	1,25	ossia $^1/_4$	88	5	7
1,50	ossia $^1/_2$	46	6	20	1,50	ossia $^1/_2$	73	9	14
1,75	ossia $^1/_3$	39	11	13	1,75	ossia $^1/_3$	63	3	27
2,00	. . .	35	—	1	2,00	. . .	55	5	22
2,25	. . .	31	1	25	2,25	. . .	49	4	14
2,50	. . .	28	—	25	2,50	. . .	44	5	26
2,75	. . .	24	—	14	2,75	. . .	40	5	28
3,00	. . .	23	5	12	3,00	. . .	37	2	—
3,25	. . .	21	8	24	3,25	. . .	34	4	5
3,50	. . .	20	1	24	3,50	. . .	31	11	6
3,75	. . .	18	9	28	3,75	. . .	29	10	3
4,00	. . .	17	8	2	4,00	. . .	28	—	3
4,25	. . .	16	7	25	4,25	. . .	26	4	22
4,50	. . .	15	2	21	4,50	. . .	24	11	15
4,75	. . .	14	11	7	4,75	. . .	23	8	2
5,00	. . .	14	2	15	5,00	. . .	22	6	6
5,25	. . .	13	6	17	5,25	. . .	21	5	19
5,50	. . .	12	10	25	5,50	. . .	20	6	5
5,75	. . .	12	4	23	5,75	. . .	19	7	24
6,00	. . .	11	10	22	6,00	. . .	18	10	7
6,25	. . .	11	5	6	6,25	. . .	18	1	13
6,50	. . .	11	—	2	6,50	. . .	17	5	1
6,75	. . .	10	7	10	6,75	. . .	16	9	24
7,00	. . .	10	2	28	7,00	. . .	16	2	25
7,25	. . .	9	10	25	7,25	. . .	15	8	9
7,50	. . .	9	7	—	7,50	. . .	15	2	8
7,75	. . .	9	3	13	7,75	. . .	14	8	18
8,00	. . .	9	—	2	8,00	. . .	14	3	19
8,25	. . .	8	8	28	8,25	. . .	13	10	8
8,50	. . .	8	5	29	8,50	. . .	13	5	8
8,75	. . .	8	3	5	8,75	. . .	13	1	13
9,00	. . .	8	—	16	9,00	. . .	12	8	29
9,25	. . .	7	10	1	9,25	. . .	12	4	21
9,50	. . .	7	7	20	9,50	. . .	12	1	7
9,75	. . .	7	5	12	9,75	. . .	11	9	21
10,00	. . .	7	3	8	10,00	. . .	11	6	9
10,25	. . .	7	1	7	10,25	. . .	11	3	3
10,50	. . .	6	11	9	10,50	. . .	11	—	1
10,75	. . .	6	9	14	10,75	. . .	10	9	3

TAVOLE DELLE PRINCIPALI

MONETE, PESI E MISURE

NON ITALIANE.

Tavola I. —

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Annover . .	Corona	*Oro*
»	Mezza corona	»
»	Tallero	*Argento*
»	Un sesto di tallero . . .	»
»	Un sedicesimo di tallero .	»
»	Doppio tallero d'associazione	»
»	Tallero d'associazione . .	»
Austria . . .	Corona	*Oro*
»	Ducato	»
»	Mezza corona	»
»	Due fiorini	*Argento*
»	Fiorino	»
»	Quarto di fiorino	»
»	Doppio tallero d'associazione	»
»	Tallero d'associazione . .	»
»	Pezzo da 10 Creuzer . .	»
»	Pezzo da 5 » . . .	»
Baden (Granducato)	Ducato	*Oro*
»	Corona	»
»	Mezza corona	»
»	Doppio fiorino	*Argento*
»	Fiorino o Gulden	»
»	Mezzo fiorino	»
»	Doppio tallero	»
»	Tallero	»
»	Sei Creuzer	*Erosomisto*

Monete. [1]

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 11,111	900	L. 3093,30	L. 34,39
» 5,556	900	» 3093,30	» 17,19
» 22,271	750	» 165,42	» 3,76
» 4,677	520	» 114,69	» 0,53
» 2,318	520	» 114,69	» 0,26
» 37,034	900	» 198,50	» 7,35
» 18,517	900	» 198,50	» 3,68
» 11,120	900	» 3093,30	» 34,39
» 3,480	986	» 3382,00	» 11,80
» 5,556	900	» 3093,30	» 17,19
» 24,691	900	» 198,50	» 4,90
» 12,345	900	» 198,50	» 2,45
» 5,341	520	» 114,69	» 0,61
» 37,034	900	» 198,50	» 7,35
» 18,517	900	» 198,50	» 3,68
» 2,000	500	» 110,28	» 0,22
» 1,330	375	» 82,71	» 0,11
» 3,490	986	» 3368,26	» 11,75
» 11,111	900	» 3093,30	» 34,39
» 5,556	900	» 3093,30	» 17,19
» 21,164	900	» 198,50	» 4,21
» 10,582	900	» 198,50	» 2,10
» 5,291	900	» 198,50	» 1,05
» 37,034	900	» 198,50	» 7,35
» 18,517	900	» 198,50	» 3,68
» 2,550	333	» 73,44	» 0,18

[1] Le monete del Belgio, della Francia e della Svizzera, dietro la convenzione del 1865, hanno corso in Italia secondo il loro valore nominale, ossia come le monete italiane.

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Baviera . . .	Come nel Granducato di Baden	
Belgio . . .	Pezzo da 100 Franchi . .	*Oro*
»	» 50 » . .	»
»	» 20 » . .	»
»	» 10 » . .	»
»	» 5 » . .	»
»	Pezzo da 5 Franchi . . .	*Argento*
»	» 2 » . .	»
»	» 1 » . . .	»
»	Pezzo da 50 Centesimi . .	»
»	» 20 » . .	»
Brasile . . .	Venti milrei	*Oro*
»	Dieci milrei	»
»	Cinque milrei	»
»	Due milrei	*Argento*
»	Milrei	»
»	Cinquecento rei	»
Costantinopoli	(Vedi Turchia).	
Danimarca . .	Doppio cristiano	*Oro*
»	Cristiano	»
»	Federico	»
»	Doppio risdallero	*Argento*
»	Risdallero	»
»	Mezzo risdallero	»
»	Sedici schilling	»
»	Quattro schilling	*Erosomisto*
Egitto . . .	Pezzo da 400 piastre . .	*Oro*
»	» 200 » . .	»
»	» 100 » . .	»

la Tavola I.

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 32,2580	900	L. 3093,30	L. 99,7839
» 16,1290	900	» 3093,30	» 49,8919
» 6,4516	900	» 3093,30	» 19,9568
» 3,2258	900	» 3093,30	» 9,9784
» 1,6129	900	» 3093,30	» 4,9892
» 25,000	900	» 198,50	» 4,9625
» 10,000	835	» 184,16	» 1,8416
» 5,000	835	» 184,16	» 0,9209
» 2,500	835	» 184,16	» 0,4604
» 1,000	835	» 184,16	» 0,1842
» 17,926	916	» 3141,41	» 56,31
» 8,963	916	» 3141,41	» 28,15
» 4,486	916	» 3141,41	» 14,07
» 25,495	900	» 198,50	» 4,96
» 12,747	900	» 198,50	» 1,48
» 6,250	835	» 184,16	» 1,14
» 13,284	896	» 3079,55	» 40,90
» 6,642	896	» 3079,55	» 20,40
» 6,600	896	» 3079,55	» 20,48
» 28,800	875	» 193,87	» 5,58
» 14,400	875	» 193,87	» 2,79
» 7,200	875	» 193,87	» 1,39
» 3,950	567	» 125,05	» 0,46
» 1,950	406	» 89,54	» 0,17
» 34,000	875	» 3003,93	» 102,13
» 17,000	875	» 3003,03	» 51,06
» 8,500	875	» 3007,37	» 25,56

Segue

Nome degli Stati	Moneto	Metallo
Egitto . . .	Pezzo da 50 piastre . . .	*Oro*
»	» 20 » . .	»
»	» 10 » . .	*Argento*
»	» 5 » . . .	»
»	» 2 piastre e $^1/_2$.	»
»	Piastra di 40 para . . .	»
Francia . .	Come nel Belgio	
Germania (Confed.)	Corona	*Oro*
»	Mezza corona	»
»	Tallero (nella prima zona) .	*Argento*
»	Fiorino (nella seconda zona)	»
»	Fiorino (nella terza zona) .	»
»	Doppio tallero	»
Giappone . .	Cabang antico	*Oro*
»	Cabang nuovo	»
»	Nandiogin	»
»	Tael o Tale, moneta convenzionale = 10 Mas = 100 Candorini	»
Grecia . . .	Cento dramme	*Oro*
»	Cinquanta dramme . . .	»
»	Venti dramme o Fenice .	»
»	Dieci dramme	»
»	Cinque dramme	»
»	Cinque dramme	*Argento*
»	Doppia dramma	»
»	Dramma = 100 Lepta . .	»
»	Cinquanta centesimi di dramma	»
»	Venti centesimi di dramma	»

la Tavola I.

Peso legale		Titolo legale	Valore del Chilogrammo		Valore reale del Pezzo	
Gr.	4,250	875	L.	3007,37	L.	12,78
»	2,130	875	»	3003,93	»	6,39
»	12,500	900	»	198,50	»	2,48
»	6,250	900	»	198,50	»	1,24
»	3,120	900	»	198,50	»	0,62
»	1,250	900	»	198,50	»	0,25
»	11,120	900	»	3093,30	»	34,39
»	5,560	900	»	3093,30	»	17,19
»	18,517	900	»	198,50	»	3,68
»	12,345	900	»	198,50	»	2,45
»	10,606	900	»	198,50	»	2,10
»	37,034	900	»	198,50	»	7,35
					»	51,88
					»	29,93
					»	5,70
					»	3,25
»	32,258	900	»	3093,30	»	99,78
»	16,129	900	»	3093,30	»	49,89
»	6,451	900	»	3093,30	»	19,96
»	3,225	900	»	3093,30	»	9,98
»	1,612	900	»	3093,30	»	4,99
»	25,000	900	»	198,50	»	4,96
»	10,000	835	»	184,16	»	1,84
»	5,000	835	»	184,16	»	0,92
»	2,500	835	»	184,16	»	0,46
»	1,000	835	»	184,16	»	0,18

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Indie Inglesi .	Mohur = 15 rupie . . .	*Oro*
»	Doppia pagode	»
»	Pagode = 1/4 di Mohur . .	»
»	Rupia ossia 16 anna . . .	*Argento*
»	Mezza rupia	»
»	Quarto di rupia	»
»	Ottavo di rupia = 2 anna .	»
Inghilterra .	Sovrana	*Oro*
»	Mezza sovrana	»
»	Corona	*Argento*
»	Mezza corona	»
»	Fiorino	»
»	Scellino = 12 pence . . .	»
»	Mezzo scellino	»
»	Quattro pence o Groat . .	»
»	Tre pence	»
»	Doppio penny o due pence	»
»	Penny	*Bronzo*
Marocco . .	Mandridia = 10 piastre spagnole	*Oro*
»	Doppio Bendoki	»
»	Bendoki = piastra . . .	»
»	Mitocal o Metical = 10 Ulkias = 100 Blankillos .	*Argento*
Messico . . .	Quattro pistole od Oncia .	*Oro*
»	Doppia pistola	»
»	Pistola o piastra	»
»	Mezza pistola o scudo . .	»
»	Quarto di pistola	»
»	Piastra = 8 reali	*Argento*

la Tavola I.

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 11,664	916	L. 3148,29	L. 36,72
» 5,832	916	» 3148,29	» 18,36
» 2,916	916	» 3148,29	» 9,18
» 11,664	916	» 202,83	» 2,36
» 5,832	916	» 202,83	» 1,18
» 2,916	916	» 202,83	» 0,59
» 1,458	916	» 202,83	» 0,29
» 7,988	916	» 3148,29	» 25,15
» 3,994	916	» 3148,29	» 12,57
» 28,276	925	» 203,57	» 5,75
» 14,138	925	» 203,57	» 2,87
» 11,310	925	» 203,57	» 2,30
» 5,655	925	» 203,57	» 1,15
» 2,828	925	» 203,57	» 0,57
» 1,885	925	» 204,01	» 0,38
» 1,414	925	» 204,01	» 0,28
» 0,942	925	» 204,01	» 0,19
			» 0,11
			» 52,660
			» 10,532
			» 5,266
			» 2,633
» 27,000	875	» 3007,37	» 81,19
» 13,500	875	» 3007,37	» 40,59
» 6,750	875	» 3007,37	» 20,29
» 3,375	875	» 3007,37	» 10,14
» 1,687	875	» 3007,37	» 5,07
» 27,000	903	» 198,50	» 5,35

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Messico . . .	Quattro reali=Mezza piastra.	*Argento*
»	Due reali	»
»	Reale	»
»	Mezzo reale	»
»	Quarto di reale o Quartino .	»
Norvegia . .	Vedi Svezia.	
Olanda . . .	Vedi Paesi Bassi.	
Paesi Bassi .	Doppio ducato	*Oro*
»	Ducato	»
»	Doppio Guglielmo	»
»	Guglielmo	»
»	Mezzo Guglielmo	»
»	Risdallero=2 $^1/_2$ fiorini . .	*Argento*
»	Fiorino	»
»	Mezzo fiorino	»
»	Pezzo da 25 centesimi . .	»
»	» 10 » . .	
»	» 5 » . .	
Persia . . .	Doppio Toman (20000 dinar)	*Oro*
»	Toman (10000 dinar) . .	»
»	Depemps (5000 dinar) . .	»
»	2 hazar-dinar (2000 dinar).	*Argento*
»	Yek-hazar-dinar (1000 dinar).	»
»	Deh-scahi o Banabat (500 din.)	»
»	Pindi-schahi (250 dinar) . .	»
»	Schahi = 50 dinar	*Rame*
Portogallo .	Corona da 10000 rei . .	*Oro*
»	» 5000 » . .	»
»	» 2000 » . .	»
»	» 1000 » o Milrei	»

la Tavola I.

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 13,500	903	L. 198,50	L. 2,67
» 6,750	903	» 198,50	» 1,33
» 3,375	903	» 198,50	» 0,66
» 1,687	903	» 198,50	» 0,33
» 0,843	903	» 198,50	» 0,16
» 6,988	983	» 3361,38	» 23,48
» 3,494	983	» 3361,38	» 11,74
» 13,458	900	» 3361,38	» 41,58
» 6,729	900	» 3089,86	» 20,79
» 3,364	900	» 3089,86	» 10,39
» 25,000	945	» 208,42	» 5,21
» 10,000	945	» 208,42	» 2,08
» 5,000	945	» 208,42	» 1,04
» 3,575	640	» 141,15	» 0,50
» 1,430	640	» 141,15	» 0,20
» 0,715	640	» 141,15	» 0,10
» 7,52	916	» 3093,50	» 22,27
» 3,76	916	» 3093,50	» 11,14
» 1,88	916	» 3093,50	» 5,57
» 10,40	900	» 198,50	» 2,22
» 5,20	900	» 198,50	» 1,11
» 2,60	900	» 198,50	» 0,44
» 1,30	900	» 198,50	» 0,22
» 18,10			» 0,11
» 17,735	917	» 3151,72	» 55,88
» 8,868	917	» 3151,72	» 27,94
» 3,547	917	» 3151,72	» 11,17
» 1,774	917	» 3151,72	» 5,59

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Portogallo . .	Cinque testoni o 500 rei .	*Argento*
»	Due testoni o 200 » .	»
»	Testone 100 » .	»
»	Mezzo testone 50 » .	»
Principati Danu-	Pezzo da 20 piastre o Ley .	*Oro*
biani	» 10 » . . .	»
»	» 5 » . . .	»
»	» 2 » . . .	*Argento*
»	Ley.	»
»	Mezza piastra	»
Prussia . . .	Doppio Federico	*Oro*
»	Federico	»
»	Mezzo Federico	»
»	Corona	*Argento*
»	Mezza corona	»
»	Tallero antico	»
»	Doppio tallero d'associazione.	»
»	Tallero d' associazione . .	»
Repubblica Ar-	Quadruplo di pistola=16 pia-	
gentina	stre	*Oro*
»	Doppia pistola	»
»	Pistola	»
»	Pistola=8 reali	*Argento*
Repubblica	Quadruplo di 16 piastre .	*Oro*
della Bolivia	Piastra=8 reali	*Argento*
Repub. del Chilì	Condor, 10 pesi	*Oro*
»	Quadruplo	»
»	Peso o piastra	»
»	Piastra 100 centesimi . .	*Argento*
»	Pezzo da 50 centesimi . .	»

la Tavola I.

Peso legale		Titolo legale	Valore del Chilogrammo		Valore reale del Pezzo	
Gr.	12,500	917	L.	202,25	L.	2,52
»	5,000	917	»	202,25	»	1,01
»	2,500	917	»	202,25	»	0,50
»	1,250	917	»	202,25	»	0,25
»	6,452	900	»	3093,50	»	19,958
»	3,226	900	»	3093,50	»	9,979
»	1,613	900	»	3093,50	»	4,989
»	10,000	900	»	198,50	»	1,985
»	5,000	900	»	198,50	»	0,992
»	2,500	900	»	198,50	»	0,496
»	13,364	903	»	3082,99	»	41,20
»	6,682	903	»	3082,99	»	20,60
»	3,341	903	»	3082,99	»	10,30
»	11,120	900	»	3093,30	»	34,39
»	5,560	900	»	3093,30	»	17,19
»	22,271	750	»	165,42	»	3,76
»	37,036	900	»	198,50	»	7,35
»	18,517	900	»	198,50	»	3,68
»	27,000	868	»	2983,31	»	80,54
»	13,500	868	»	2983,31	»	40,27
»	6,250	868	»	2983,31	»	20,135
»	25,000	9030	»	198,50	»	4,96
»	27,000	875	»	3007,37	»	81,19
»	27,000	903	»	198,50	»	5,35
»	15,253	900	»	3089,86	»	47,18
»	27,000	875	»	3007,37	»	81,19
»	1,525	900	»	3089,86	»	4,72
»	25,500	900	»	198,50	»	4,96
»	12,500	900	»	198,50	»	2,48

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Repub. del Chilì	Pezzo da 20 centesimi . .	*Argento*
»	Un decimo	»
»	Mezzo decimo	»
Rep. dell'Equatore	Quadruplo di 16 piastre . .	*Oro*
	Piastra	*Argento*
Repubblica Nuova Granata	Quadruplo o 16 piastre . .	*Oro*
	Candor o 10 piastre . . .	»
»	Piastra 10 reali	*Argento*
»	Pezzo da 50 centesimi . .	»
»	» 20 » . .	»
»	Reale o 10 centesimi . . .	»
»	Mezzo reale	»
Rep. di Quatimala	Quadruplo	*Oro*
»	Piastra = 8 reali	*Argento*
Repub. del Perù	Pezzo da 20 sol	*Oro*
»	» 10 sol	»
»	» 5 sol	»
»	» 2 sol	»
»	» 1 sol	»
»	» 1 sol (in proporzione il $^1/_2$ e il $^1/_5$ di sol).	*Argento*
	Denaro	»
Rep. dell'Uraguaj	Piastra forte di denari 10, 5	
»	ossia di 8 reali	»
Rep. di Venezuela	Piastra da 10 reali . . .	»
Roma	Pezzo da 100 lire	*Oro*
»	» 50 »	»
»	» 20 »	»
»	» 10 »	»
»	» 5 »	»

la Tavola I.

Peso legale		Titolo legale	Valore del Chilogrammo		Valore reale del Pezzo	
Gr.	5,000	900	L.	198,50	L.	0,99
»	2,500	900	»	198,50	»	0,49
»	1,250	900	»	198,50	»	0,29
»	27,000	875	»	3007,37	»	81,19
»	25,000	900	»	198,50	»	4,96
»	25,806	900	»	3093,30	»	79,82
»	16,400	892	»	3063,80	»	50,27
»	25,000	900	»	198,50	»	4,96
»	12,500	900	»	198,50	»	2,48
»	25,000	900	»	198,50	»	0,99
»	2,500	900	»	198,50	»	0,49
»	1,250	900	»	198,50	»	0,29
»	27,000	875	»	3007,37	»	81,19
»	27,000	903	»	198,60	»	5,35
»	32,258	900	»	3093,30	»	99,79
»	16,129	900	»	3003,30	»	49,89
»	8,064	900	»	3093,30	»	24,94
»	3,226	900	»	3093,30	»	9,97
»	1,613	900	»	3093,30	»	4,99
»	25,00	900	»	198,50	»	4,96
»	2,5	900	»	198,50	»	0,49
»	27,00	875	»	192,99	»	5,21
»	25,00	800	»	176,44	»	4,41
»	32,258	900	»	3093,30	»	99,7839
»	16,129	900	»	3093,30	»	49,8919
»	6,45161	900	»	3093,30	»	19,9568
»	3,2258	900	»	3093,30	»	9,9784
»	1,6124	900	»	3093,30	»	4,9892

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
Roma	Pezzo da 5 lire	*Argento*
»	» 2,50 lire . . .	»
»	» 2,00 » . . .	»
»	» 1,00 » . . .	»
»	Pezzo da 50 centesimi . .	»
»	» 25 » . .	»
Russia . . .	Mezzo imperiale	*Oro*
»	Rublo=100 Kopeck . . .	*Argento*
»	Mezzo Rublo=50 Kopek . .	»
»	Pezzo da 25 Kopek . . .	»
»	Pezzo da 20 Kopek . . .	»
»	» 15 » . . .	»
»	» 10 » . . .	»
»	» 5 » . . .	»
Sassonia . .	Corona	*Oro*
»	Mezza corona	»
»	Tallero	*Argento*
»	Sesto di Tallero	»
»	Doppio tallero d'associazione	»
»	Tallero d'associazione . .	»
Spagna . . .	Doppia da 10 scudi . . .	*Oro*
»	» 4 » . . .	»
»	» 2 » . . .	»
»	Duro o doppio scudo . .	*Argento*
»	Scudo=10 reali	»
Spagna	Peseta=4 reali	»
(Isole Filippine)	Doppio reale	»
»	Reale=100 centesimi . .	»
»	Doppia, 4 pesi	*Oro*
»	Scudo, 2 pesi	»

la Tavola I.

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 25,00	900	L. 198,50	L. 4,9625
» 12,50	835	» 184,16	» 2,30
» 10,00	835	» 184,16	» 1,8416
» 5,00	835	» 184,16	» 0,9208
» 2,50	835	» 184,16	» 0,4604
» 1,25	835	» 184,16	» 0,2302
» 6,545	916	» 3148,29	» 20,60
» 20,511	868	» 191,55	» 3,92
» 10,255	868	» 191,55	» 1,96
» 5,127	868	» 191,55	» 0,98
» 4,079	750	» 165,42	» 0,78
» 3,059	750	» 165,42	» 0,50
» 2,039	750	» 165,42	» 0,39
» 1,019	750	» 165,42	» 0,19
» 11,120	900	» 3093,30	» 34,39
» 5,560	900	» 3093,30	» 17,19
» 18,519	750	» 165,42	» 3,68
» 4,677	520	» 114,69	» 0,53
» 37,034	900	» 198,50	» 7,28
» 18,517	900	» 198,50	» 3,68
» 8,387	900	» 3077,83	» 25,95
» 3,355	900	» 3077,83	» 10,30
» 1,677	900	» 3077,83	» 5,19
» 25,960	900	» 198,50	» 5,15
» 12,980	900	» 198,50	» 2,57
» 5,192	810	» 178,64	» 0,93
» 2,596	810	» 178,64	» 0,46
» 1,298	810	» 178,64	» 0,23
» 6,766	875	» 3007,37	» 20,34
» 3,383	875	» 3007,37	» 10,17

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
SPAGNA	Peso	*Oro*
(Isole Filippine)	Pezzo da 50 centesimi . .	*Argento*
»	» 20 » . .	»
»	» 10 » . .	»
STATI-UNITI .	Pezzo da 20 dollari . . .	*Oro*
»	» 10 » o Aquila .	»
»	» 5 » . . .	»
»	Pezzo da 2 1/2 dollari . .	»
»	Dollaro	»
»	Dollaro	*Argento*
»	Mezzo dollaro=50 cent. .	»
»	Pezzo da 25 cent. . . .	»
»	» 10 » o Dime. .	»
»	» 5 » o 1/2 Dime.	»
SVEZIA E NORVEGIA	Ducato	*Oro*
»	Mezzo ducato	»
»	Quarto di ducato	»
»	Ristallero	*Argento*
»	Mezzo ristallero	»
»	Pezzo da 24 scellini . . .	»
»	» 12 » . . .	»
»	Ristallero *species*	»
»	Mezzo ristallero *species* . .	»
SVIZZERA (Confed.)	Come nel Belgio	
WURTEMBERG .	Vedi Baviera	
TUNISI . . .	Pezzo da 100 piastre . .	*Oro*
»	» 50 » . . .	»
»	» 25 » . . .	»
»	» 10 » . . .	»
»	» 5 » . . .	»

la Tavola I.

Peso legale		Titolo legale	Valore del Chilogrammo		Valore reale del Pezzo	
Gr.	1,691	875	L.	3007,37	L.	5,08
»	12,980	900	»	198,50	»	2,57
»	5,192	900	»	198,50	»	1,03
»	2,596	900	»	198,50	»	0,515
»	33,437	900	»	3093,30	»	103,42
»	16,718	900	»	3093,30	»	51,71
»	8,359	900	»	3093,30	»	25,85
»	4,180	900	»	3093,30	»	12,92
»	1,672	900	»	3093,30	»	5,17
»	26,729	900	»	198,50	»	5,31
»	13,364	900	»	198,50	»	2,65
»	6,682	900	»	198,50	»	1,32
»	2,672	900	»	198,50	»	0,53
»	1,336	900	»	198,50	»	0,26
»	3,482	976	»	3351,07	»	11,66
»	1,741	976	»	3351,07	»	5,83
»	0,870	976	»	3351,07	»	2,91
»	33,925	750	»	165,42	»	5,61
»	16,962	750	»	165,42	»	2,80
»	5,970	878	»	193,65	»	1,12
»	2,890	878	»	193,65	»	0,56
»	28,949	875	»	192,99	»	5,58
»	14,474	875	»	192,99	»	2,79
»	19,492	900	»	3093,30	»	60,29
»	9,760	900	»	3093,30	»	30,19
»	4,855	900	»	3093,30	»	15,01
»	1,916	900	»	3093,30	»	5,93
»	0,940	900	»	3093,30	»	2,92

Segue

Nome degli Stati	Monete	Metallo
TUNISI . . .	Doppia piastra Tunisina . .	*Argento*
TURCHIA . . .	Pezzo da 500 piastre . .	*Oro*
»	Pezzo da 250 piastre . .	»
»	Pezzo da 100 piastre turche o Tuslik	»
»	Pezzo da 50 piastre turche o Ellilik	»
»	Pezzo da 20 piastre turche o Trimilik	*Argento*
»	Pezzo da 10 piastre turche o Onlik	»
»	Pezzo da 5 piastre turche o Beschlik	»
»	Pezzo da 2 piastre turche o Skilik	»
»	Piastra turca=40 para=100 aspri	»
»	Mezza piastra	»

la Tavola I.

Peso legale	Titolo legale	Valore del Chilogrammo	Valore reale del Pezzo
Gr. 6,194	900	L. 198,50	L. 1,23
» 36,082	917	» 3144,85	» 113,47
» 18,041	917	» 3144,85	» 56,73
» 7,216	917	» 3144,85	» 22,69
» 3,608	917	» 3144,85	» 11,35
» 24,055	830	» 183,06	» 4,38
» 12,027	830	» 183,06	» 2,19
» 6,013	830	» 183,06	» 1,10
» 2,405	830	» 183,06	» 0,43
» 1,202	830	» 183,06	» 0,21
» 0,601	830	» 183,06	» 0,105

Tavola II.

MISURE LINEARI E ITINERARIE.

Stati	Misure	Metri
Algeri . . .	Metro	1,000000
Amburgo . .	Piede=3 palmi di 4 pollici.	0,286415
Amsterdam . .	Pertica di 13 piedi di 3 palmi.	3,680729
Annover . .	Braccio	0,582900
Anversa . .	Auna	0,594200
Aquisgrana .	Braccia	0,573300
Aragona . .	Varra	0,670000
Argentina . .	Braccio	0,460400
Augusta . . .	Piedi di 12 pollici di 12 linee l'uno.	0,296168
Barcellona .	Varra	0,671600
Basilea . . .	Auna	1,132500
Bengal . . .	Cabidos	0,400500
Berlino . . .	Piedi del Reno di 12 pollici di 12 linee.	0,313854
»	Stab=100 Neu-Zoll=1000 Strich	1,000000
Berna . . .	Braccio	0,526500
Bombay . . .	Gutz	0,673200
Baviera . . .	Ellen	0,832900
Cadice . . .	Piede di Burgos	0,283000
Calcutta . .	Covilo	0,464600
Ciambery . .	Piede di 12 pollici di 12 linee l'uno	0,313854
Colonia . . .	Piede . . . idem	0,287393
Copenaghen .	Braccio	0,633400
Costantinopoli	Pick grande, halebi o archim.	0,677877
Cracovia . .	Piede di 12 pollici di 12 linee l'uno	0,356421

Segue la Tavola II.

Stati	Misure	Metri
Dresda . . .	Piede . . . idem	0,283260
Egitto . . .	Pick	0,683500
Francoforte .	Piedi di 12 once	0,284610
Francia . . .	Sistema metrico-decimale .	
»	Tesa di 6 piedi di 12 pollici.	1,949036
»	Pollice di 12 linee di 12 punti.	0,0270699
Giamaica . .	Verga	0,492100
Giappone . .	Incka	2,107200
Lipsia . . .	Piede di 12 pollici di 12 linee.	0,282656
Lisbona . . .	Palmo di 8 pollici . . .	0,218590
Londra . . .	Yard di 3 piedi	0,914383
»	Tesa=2 Yard	1,8287669
»	Miglio=1760 yard . . .	1609,3149
Lione . . .	Piede	0,288000
Lubecca . . .	Braccia	0,559900
Madrid . . .	Estadale=2 estade di 6 piedi.	3,344632
Marocco . .	Pick	0,566700
Malta . . .	Canna	1,501400
Parigi . . .	Vedi Francia	
Pechino . . .	Piede legale	0,333100
»	Congbu dei costruttori . .	0,322800
»	Li	577,0000
Pietroburgo .	Sacken o tesa	2,133561
»	Werst di 500 tese . . .	1067,000
Stoccolma . .	Pertica di 16 piedi di 12 pollici	4,750416
Tripoli . . .	Pick	0,677877
Tunisi . . .	Pick	0,653400
Trieste . . .	Piede veneto	0,347735
»	Piede tedesco	0,316111
Varsavia . .	Piede.	0,283000
Vienna . . .	Ellen o Braccio di 12 once.	0,779213

Segue la Tavola II.

Stati	Misure	Metri
VIENNA . . .	Klafter di 6 piedi o fuss. .	1,896666
VURTEMBERG .	Miglio	7586,000
»	Piede	0,286000
ZURIGO . . .	Braccio	0,595800
»	Piede	0,301000

Tavola III.

DELLE MISURE DI ARIDI.

Stati	Misure	Ettolitri
Ales. di Egitto.	Ardep	2,710000
Amburgo . .	Last di 3 winspel . . .	31,588800
Amsterdam . .	Last di 27 mudde . . .	30,039120
Annover . .	Flinten di 3 metzen . .	0,310000
Anversa . .	Viertel	0,800000
Augusta . .	Schaf di 8 metzen . . .	2,052670
Atene . . .	Chilò	0,271700
Barcellona .	Quartera di 12 cortan . .	0,710000
Basilea . . .	Sacco di 8 sceffel . . .	1,290000
Baviera . . .	Schaf di 8 metzen . . .	4,400000
Berlino . . .	Scheffel di 16 metzen . .	0,549610
»	Fass	1,000000
Berna . . .	Mutt di 12 Masse . . .	1,680000
Bruxelles . .	Sacco, vecchia misura . .	1,160000
Buda	Metzen di 4 quarti . .	0,576000
Buenos-Ayres .	Cahiz di 12 Barcellaz . .	2,501700
Cadice . . .	Fanega di 12 celemine .	0,553333
Cairo . . .	Ardep	1,790000
Cassel . . .	Wiertel di 4 himten . .	1,430000
Chilì . . .	Faneghe di 4 quarti . .	0,552100
Copenaghen .	Last di 16 Schipfund . .	27,780000
Colonia . . .	Malter di 24 Fass . . .	1,620000
Corfù . . .	Moggio di 8 Misure . . .	1,680000
Costantinopoli	Fortin di 4 kilot	1,325920
Cracovia . .	Kerzec di 16 garmiec . .	5,011160
Danzica . . .	Scheffel di 4 wiertel . .	0,550000
Dresda . . .	Wiespel di 2 malter . .	25,389120
Francfort . .	Malter di 4 simmer . . .	1,079840
Ginevra . .	Coppo	0,780000

Segue la Tavola III.

Stati	Misure	Ettolitri
GIBILTERRA .	Fanega di 48 picolin . .	0,504500
LIONE . . .	Asnée vec. mis. di 6 bichet.	1,920000
LIPSIA . . .	Scheffel	1,389690
LISBONA . . .	Moyo di 15 fanegas . . .	8,139495
LOSANNA . .	Quarteron	0,140000
LONDRA . . .	Sack (3 bushel)	1,090430
»	Quarter (8 bushel). . . .	2,907810
»	Chaldron = 12 Sack . . .	13,085160
»	Bushel (8 gallon)	0,363477
LUBECCA . .	Scheffel da frumento . . .	0,330000
MALTA . . .	Salma di 16 tomoli . . .	2,916700
MARSIGLIA . .	Carica di 160 litri . . .	1,600000
MONACO . . .	Scheffel di 6 metzen . . .	3,626262
NORIMBERGA .	Maller di 16 metzen . .	1,670000
ODESSA . . .	Cetwert di 2 osmine . .	2,080000
OLANDA . . .	Come Amsterdam.	
OPORTO . . .	Alquiere	0,170000
PAESI BASSI .	Mudde per ettolitro . . .	1,000000
POLONIA . . .	Korzec	0,510000
RAGUSA . . .	Staio di 6 roupell	1,490000
RATISBONA . .	Mans di 8 metzen	2,620000
SALONICCO . .	Chilò di 4 quarti	1,445900
SMIRNE . . .	Come Costantinopoli.	
STOCCOLMA . .	Tunna di 2 spannen	1,464900
TIROLO . . .	Starr	0,310000
TRIESTE . . .	Staio di 4 quarte	0,830000
TUNISI . . .	Caffissi di 16 vohibas . . .	5,290000
ULMA . . .	Immi di 4 mittlenz . . .	2,300000
VALENZA . .	Cahiz di 12 barchillas . .	2,030000
VARSAVIA . .	Last di 60 koreze . . .	30,682900
ZURIGO . . .	Mutt di 4 wiertel . . .	0,830000

Tavola IV.

MISURE PEI LIQUIDI.

Stati	Misure	Ettolitri
ALGERI . . .	Koullé	0,160000
ALICANTE . .	Cantaro di 16 Mitjetas . .	0,134400
AMBURGO . .	Fuder di 6 ahm	8,687160
AMSTERDAM .	Aam di 4 anckern . . .	1,552240
AQUISGRANA .	Ahm di 130 boccali . . .	1,754600
ANNOVER .	Ahn di 4 anker	1,560000
ANVERSA . .	Aam di 50 stoop . . .	1,370000
AUGUSTA . .	Fuder di 8 jez	11,358720
BARCELLONA .	Gargas di 11 arobba . .	1,477900
BASILEA . . .	Barile di 40 pinte	0,867400
BAVIERA . . .	Eimer di 60 maa . . .	0,370000
BENGAL . . .	Gallone di 2 potle . . .	0,045400
BERLINO . . .	Eimer di 2 anker . . .	0,686900
»	Fass (100 Kanne)	1,000000
BERNA . . .	Saum di 100 maa . . .	1,670000
BOMBAY . . .	Gallone di 2 potle . . .	0,045400
BOEMIA . . .	Eimer di 32 pinte . . .	0,640000
BORDEAUX . .	Barrique di 32 veltes . .	2,380000
BREMA . . .	Stübken di 4 quarter . .	0,353000
BRESLAVIA . .	Eimer di 20 tompf . . .	0,637000
BRUNSWICK . .	Aam di 40 stubgen . . .	1,470000
BUENOS-AYRES .	Cantaro di 8 azumbre . .	0,134400
CADICE . . .	Arroba di 8 Azumbres . .	0,160000
CAPO DI B. SPER.	Gallone di 2 potles . . .	0,045400
CHILÌ	Arroba di 8 azumbres . .	0,134400
CHINA . . .	Gallone di 2 potle . . .	0,044000
CIAMBERY . .	Pot de vin	0,018580
CORSICA . . .	Pipa di 108 boccali . . .	1,400000
COLONIA . .	Ohm di 26 viertels . . .	1,557550

Segue la Tavola IV.

Stati	Misure	Ettolitri
Copenaga . .	Ancker di 10 stubgen . .	0,376460
Corfù . . .	Barile di 128 quartucci .	0,680000
Costantinopoli	Almud o meter	0,052270
Danimarca . .	Anker di 10 stubgen . .	0,376460
»	Viertel di 4 kans	0,080000
Danzica . . .	Eimer di 64 quarti . . .	0,750000
Dresda . . .	Fuder di 12 eimer . . .	8,091600
Francf. sul Men.	Stück di 1 ¹/₄ füdern . .	10,757250
Ginevra . . .	Sestiere di 24 quarteron .	0,530600
Giamaica . .	Gallone di 2 potles . . .	0,045400
Isole Jonie .	Barile	0,784900
Lipsia . . .	Eimer di 63 kannes . . .	0,760000
Lisbona . . .	Almude di 12 canadas . .	0,165000
Londra . . .	Gallone imperiale	0,045434
»	Pipa	5,724757
Madera . . .	Almude di 12 canadas . .	0,180000
Majorica . .	Quartino di 26 quartas . .	0,270000
Malaga . .	Cantara di 8 azumbres . .	0,160000
Malta . . .	Barile per Vino	0,420000
»	Cafisso per l'olio	0,210000
Marsiglia . .	Millerolle per il vino di 4 excandaux	0,640000
»	Millerola per l'olio . . .	0,640000
Monaco . . .	Eimer di 64 mässe . . .	0,684160
Odessa . . .	Wedro	0,148600
Oporto . . .	Almude di 12 canadas . .	0,230000
Parigi . . .	Moggio di 288 pinte . . .	2,682200
	Il Sistema Metrico-Decimale.	
Pietroburgo .	Oxhoft di 6 anker . . .	2,212110
»	Fass (mastello) di 400 stoof.	4,915600
»	Pipa (botte) di 360 stoof .	4,424040

Segue la Tavola IV.

Stati	Misure	Ettolitri
Pietroburgo .	Aam di 120 stoof . . .	1,474680
Polonia . . .	Oxhoft di 60 garniec . .	0,950000
Ragusa . . .	Barile di 84 centlet . . .	0,770000
Ratisbona . .	Eimer grande di 88 kopsen.	1,140000
»	Eimer piccolo di 68 kopsen.	0,880000
Revel . . .	Anker di 32 $^1/_2$ stoof . .	0,420000
Riga	Anker di 30 stoof . . .	0,390000
Roterdam . .	Ahm di 60 stoof	1,510000
Smirne . . .	Almud di 8 ocke	0,613000
Stoccolma . .	Tunna di 48 kannen . .	1,255310
Strasburgo .	Ohm di 48 pinte	0,460000
Svezia . . .	Eimer di 60 toof	0,790000
Trieste . . .	Emero per vino di 40 boc.	0,566000
»	Orna per olio di 5 $^1/_2$ caffisi.	0,640000
Tunisi . . .	Millerole per vino . . .	0,640000
»	Mettar per olio	0,190000
Ungheria . .	Eimer nell'alta	0,730000
»	Eimer nella bassa . . .	0,570000
»	Anthals di Tokay . . .	0,510000
Valenza . .	Aroba di 8 medios . . .	0,120000
»	Carga di 15 arobas . . .	1,770000
Varsavia . .	Oxhost di 60 garniec . .	0,958200
Vienna . . .	Fass di 10 cimer	5,668196
Zante . . .	Barile 120 quartucci . .	0,700000
Zurigo . . .	Kopf (in città) di 2 maa .	0,030000
»	Kopf (in campagna) . . .	0,040000

Tavola V.

MISURE AGRARIE.

Paesi	Misure	Ettari
AMBURGO . .	Scheffel	0,419800
»	Morgen di 600 marschruthen q.	0,964720
»	Morgen di 200 geesruthen q.	0,825800
AMSTERDAM . .	Morgen	0,812865
»	Roëde (misura metrica) . .	0,100000
ANNOVER . .	Morgen	0,260100
BERLINO . . .	Morgen grande=400 ruthen quadro	0,552560
»	Morgen piccolo=180 ruthen quadro	0,255320
»	Ettaro di 10000 quadratstab	1,000000
BAVIERA . . .	Juchart	0,305200
BELGIO . . .	Bunder Vierkant (misura metrica)	0,010000
BERNA . . .	Juchart per terra arabile .	0,344600
»	Juchart per terra prativa .	0,301500
CASSEL . . .	Journal	0,231300
CIAMBERY . .	Journal= 400 tese quadre .	0,294830
COLONIA . . .	Morgen 150 pertiche quad.	0,317163
DANIMARCA . .	Zoende	0,556400
DRESDA . . .	Morgen di 300 pertiche q. .	0,553697
FRANCFORT . .	Morgen di 160 pertiche q. .	0,202506
GINEVRA . . .	Journal	0,516600
»	Pause	0,269700
IRLANDA . . .	Acre	0,655500
ISOLE IONIE . .	Moggio di 8 misure . . .	0,971200
LONDRA . . .	Acre (4840 yard q.) . . .	0,404671
»	Rood $= 1/4$ di acre . . .	0,101168

Segue la Tavola V.

Paesi	Misure	Ettari
LONDRA . . .	100 Rod (pertica quadrata).	0,252919
MADRID . . .	Jugada = 50 fenegadas . .	32,197815
»	Aranzada pei vigneti . .	0,447192
OLANDA . . .	Vedi Amsterdam.	
PARIGI . . .	Arpent des eaux-et-forêts =100 pertiche	0,510720
»	Arpent comune	0,422100
»	Arpent di Parigi	0,341887
	Le Misure Metrico-Decimali.	
PIETROBURGO .	Dessàtina per terreni seminativi	1,456667
»	Dessàtina per boschi . . .	1,092500
PORTOGALLO .	Geira	0,581700
SASSONIA . .	Aker	0,551300
SCOZIA . . .	Acre	0,514300
STOCCOLMA . .	Tonneland	0,493640
SVIZZERA . . .	Faux	0,656700
VALENZA . . .	Chaizada	0,424900
VARSAVIA . .	Morgen	0,559870
VIENNA . . .	Jugero = 1600 Klafler q. .	0,575574
ZANTE . . .	Bacile	0,121400
»	Zapada pei vigneti . . .	0,040500
ZURIGO . . .	Juchart grande	0,324400
»	Juchart piccolo	0,288000

Tavola VI.

DEI PESI.

Paesi	Pesi	Chilogrammi
Alessandria .	Rotolo	0,462000
Algeri . . .	Attari di Once 16	0,547000
»	Kebir » 24 . . .	0,819000
Amburgo . .	Pfund di 2 Marchi . . .	0,484384
Amsterdam .	Pfund	0,494090
Annover . .	Libbra di Once 16 . . .	0,487000
Anversa . .	Libbra	0,469000
Atene . . .	Oka di 400 Dramme . . .	1,278500
Augusta . .	Pfund di 32 Lothe piccoli .	0,472657
»	Pfund di 32 Lothe grandi .	0,491112
Barcellona .	Libbra di 12 Once . . .	0,401000
Belgio . . .	Pond misura metrica . .	1,000000
Berlino . . .	Pfund di 2 Marchi . . .	0,467624
»	Pfund o libbra nuova (misura metrica)	0,500000
Berna . . .	Libbra	0,522000
Bombay . . .	Maund = $^1/_{20}$ del Kandy . .	13,333500
Brasile . . .	Arobas di 32 libbre . . .	14,688000
Cadice . . .	Libbra di Once 16 . . .	0,460500
Cairo . . .	Rotolo di 144 Dramme . .	0,435000
Ciambery . .	Libbra di 16 Once . . .	0,418610
Colonia . .	Pfund di 2 Marchi . . .	0,467539
Corfù . . .	Marco di 8 Once	0,238000
Costantinopoli	Oka = 4 Cheky = 400 Dram.	1,284825
»	Teffè di 610 Dramme . .	1,959357
Cracovia . .	Pfund di 2 Marchi . . .	0,404950
Damasco . .	Rottolo	2,102800
Danimarca . .	Libbra commerciale . . .	0,501000
Danzica . . .	Libbra	0,467600

Segue la Tavola VI.

Paesi	Pesi	Chilogrammi
Dresda . . .	Pfund di 32 Joth	0,467147
Francfort . .	Pfund	0,505296
Ginevra . . .	Libbra	0,455200
Giappone . .	Catty	0,599000
Indostan . .	Monbasar di 40 Seyras . .	0,364000
Ibraila . . .	Ocka	1,175200
Lipsia . . .	Pfund	0,466891
Lisbona . .	Quintal di 4 Arrobas . .	58,741888
Londra . . .	Libbra (avoir du pois) . .	0,453926
»	Quintale	50,802000
»	Tonnellata	1016,048
»	Oncia $^1/_{16}$ di libbra . . .	0,0283495
»	Dramma $^1/_{16}$ di oncia . .	0,0017718
»	Peso Troy	0,373242
Madrid . . .	Quintal di 100 libbre . .	46,009600
Malabar . .	Seyras	0,274400
Malta . . .	Rottolo	0,791600
Monaco . . .	Quintale di 100 libbre . .	56,000000
Parigi . . .	Libbra di 2 Marchi . . .	0,489506
	Le Misure Metriche.	
Pechino . . .	Pecul=100 Catty di 16 tail o lyang.	60,039900
Pietroburgo .	Pud di 40 Funt	16,280000
Smirne . . .	Rottolo	0,548900
Stoccolma . .	Skolpund di 2 Marchi . .	0,425082
»	Sten	13,602624
Trieste . . .	Libbra di 16 once . . .	0,560012
Tunisi . . .	Rottolo	0,504000
Varsavia . .	Pfund	0,377866
Vienna . . .	Libbra di 30 Once . . .	0,560012
»	Marca	6,280644

Avvertimento.

Il sistema di misure e monete che ha per base il Metro, cioè la quaranta milionesima parte del meridiano terrestre, è stato già adottato officialmente dai seguenti Stati: Belgio, Brasile, Chilì, Francia, Grecia, Italia, San Marino, Messico, Nuova Granata, Olanda, Portogallo, Roma, Spagna, Repubbliche dell'America del Sud e Confederazione Germanica del Nord.

PARTE TERZA.

DELLE PROGRESSIONI E DEI LOGARITMI.

DELLE PROGRESSIONI.

248. *Progressione,* siccome altrove dicemmo (168), si chiama una serie di quantità, che crescono o decrescono nella medesima continua proporzione. Essa è *Aritmetica* o *Geometrica* secondo la qualità della ragione, che passa fra i termini (168); così 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 ec. è una Progressione *Aritmetica;* e 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ec. è una Progressione *Geometrica;* ed ambedue sono *crescenti*, perchè i loro termini vanno crescendo. Al contrario la progressione Aritmetica 11 : 9 : 7 : 5 : 3 : 1, e la progressione Geometrica 4 : 2 : 1 : $^1/_2$: $^1/_4$: $^1/_8$ ec. sono *decrescenti*, perchè i loro termini diminuiscono. La progressione Aritmetica s'indica col segno ∴ fatto precedere al primo termine, e la Geometrica s'indica col segno :: – Passiamo a parlare dell'una e dell'altra.

DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE.

249. Si prenda la progressione *crescente* ∴ 1 : 5 : 9 : 13 : 17 : 21 : 25 : 29 : 33 : 37 : 41 : 45 ec. la cui ragione è 4, e la *decrescente* ∴ 23 : 21 : 19 : 17 : 15 : 13 : 11 : 9 : 7 : 5 : 3 : 1 ec. la cui ragione è 2. Se ci facciamo a considerarle, scopriremo alcune singolarissime proprietà, che facilmente ci persuaderemo dover esser comuni a qua-

lunque altra progressione aritmetica, tanto crescente che decrescente.

È chiaro che ogni termine della progressione crescente è composto del termine antecedente, più la ragione o la differenza comune; e che ogni termine della progressione decrescente è composto dall'antecedente meno la differenza: mentre al contrario qualunque termine della progressione crescente eguaglia quello che segue, meno la differenza, e qualunque termine della decrescente è eguale a quello che segue, più la differenza. Da ciò si deducono i seguenti due teoremi.

I. Qualunque termine d'una progressione aritmetica è composto del primo, più o meno il prodotto della ragione comune, moltiplicata per il numero dei termini della progressione diminuito di 1, o sia per il numero dei termini antecedenti, secondo che la progressione è crescente o decrescente. Così nella prima progressione l'ultimo termine 45 è $=1+4\times 11$; e nell'altra l'ultimo è $=23-2\times 11=1$.

II. Il primo termine è eguale all'ultimo *meno* o *più* la ragione comune presa tante volte quanti sono i termini meno 1, ossia quanti sono i termini seguenti, secondo che la progressione è crescente o decrescente; così nella prima $1=45-4\times 11$; e nell'altra $23=1+2\times 11$.

250. Dunque I. *Per trovare un termine qualunque di una progressione aritmetica*, se siano noti il primo termine e la differenza, *si moltiplica la differenza per il numero dei termini precedenti al cercato, e questo prodotto si aggiunge al primo termine*, se la progressione è crescente; *o si sottra dal primo*, se la progressione è decrescente. Facciamone l'applicazione in ambedue i casi.

Esempio I. — Cade un corpo da un'altezza in 5 minuti secondi. Per una legge assai nota nella Fisica, non computata la resistenza dell'aria, un corpo cadendo percorre, nel primo minuto secondo, metri 4,9 in circa, nell'altro minuto secondo metri 14,7 e così successivamente in progressione aritmetica. Quanti ne percorre nel quinto minuto?

Abbiamo una progressione, il cui primo termine è 4,9, la differenza è 9,8 e si cerca il quinto termine: perciò $x=4,9+9,8\times4$ cioè $x=4,9+39,2=44,1$. Sicchè il corpo percorse nel quinto minuto metri 44 e 1 decimetro in circa.

Esempio II. — Da una cassa si levano nel primo giorno di un mese di 30 giorni L. 224, nel secondo L. 220, e così di seguito, diminuendo ogni giorno nella stessa ragione fino al termine del mese. Quante lire si levarono nell'ultimo giorno?

È questa una progressione decrescente, della quale sono dati il primo termine 224, la differenza 4, e se ne cerca il trentesimo termine; si avrà dunque $x=224-29\times4=224-116=108$ lire, che si levarono dalla cassa alla fine del mese.

251. Dunque II. Per trovare il primo termine di una progressione, quando siano cogniti l'ultimo termine, la differenza e il numero dei termini, *si moltiplica la differenza per il numero dei termini meno* 1, *e questo prodotto si sottrae dall'ultimo termine*, se la progressione è crescente; o *si aggiunge all'ultimo termine*, se la progressione è decrescente. Applichiamo la regola a questi due casi.

Esempio I. — Una nave spinta da un vento favorevole, che va sempre crescendo, ogni giorno accelera il suo corso di 6 chilometri, e nell'ultimo giorno ne fa 67: e così in 8 giorni arriva al suo destino; quanti chilometri fece nel primo giorno?

In questo caso si conoscono l'ultimo termine 67, il numero dei giorni 8 e la differenza 6 della progressione crescente: perciò $x=67-6\times7=67-42=25$ chilometri che fece la nave nel primo giorno.

Esempio II. — Una nave facendo vela per un porto con vento contrario rallenta il corso di 5 chilometri per giorno e nel nono ed ultimo giorno del suo viaggio ne fa 14. Quanti chilometri fece nel primo giorno?

In questo secondo caso sono dati l'ultimo termine 14, il numero dei termini 9 e la differenza 5 della progres-

sione decrescente: perciò $x=14+5\times8=14+40=54$ chilometri, che percorse nel primo giorno.

252. Osservo inoltre nelle medesime due progressioni (249), che la somma dei due termini estremi è eguale alla somma di altri due termini egualmente distanti dal medio, e dal doppio del medio, se il numero dei termini è dispari: così per esempio nella progressione crescente si ha $1+45=5+41=9+37=13+33=17+29=21+25$ ec. Ora, siccome in questa progressione, che ha 12 termini, vi è tante volte ripetuta la somma 46, quanti sono i termini della progressione medesima divisi per 2, così si ha per qualunque progressione il teorema:

III. *La somma di una progressione aritmetica qualunque eguaglia la somma dei due estremi moltiplicata per la metà del numero dei termini.* Dunque per trovare la somma di una progressione aritmetica, quando siano dati i due estremi e il numero dei termini, *si moltiplica la somma dei due estremi per il numero dei termini della progressione, ed il prodotto si divide per 2.* Passiamo all'applicazione.

Esempio. — Una botte piena di vino per un orifizio praticato nel fondo si vuota in progressione aritmetica in 15 ore. Nella prima ora escono 88 litri di vino e nell'ultima 4. Di quanti litri è capace la botte?

Gli estremi della progressione sono 88 e 4; e il numero dei termini è 15: noti questi tre elementi, si ha $\frac{(88+4)15}{2}=\frac{92\times15}{2}=\frac{1380}{2}=690$ litri, di cui è capace la botte.

253. Dall'esame sopra le stesse due progressioni si raccoglie, che l'estremo maggiore essendo composto dell'altro estremo minore più la differenza ripetuta tante volte, quanti sono i termini della progressione meno uno; tolto perciò l'estremo minore dal maggiore, il residuo deve contenere tante volte la ragione comune, quanti sono i termini meno uno della progressione o crescente o decrescente; onde si ha il teorema:

IV. *La ragione di una progressione aritmetica è eguale alla differenza, che passa tra l'estremo maggiore ed il minore divisa per il numero dei termini meno 1 della progressione.*

Dunque dati di una progressione aritmetica i due estremi e il numero dei termini, si ottiene la ragione o la differenza *dividendo, per il numero dei termini meno uno, l'eccesso dell'estremo maggiore sul minore.* Veniamo all'applicazione.

Esempio. — Antonio viaggiò per 10 giorni. Nel primo giorno fece 31 chilometri, e diminuendo ogni giorno di un egual numero di chilometri il suo viaggio, nell'ultimo giorno ne fece soltanto 4; quanti chilometri di meno percorse ogni giorno?

I due estremi della progressione sono 31 e 4, il numero dei termini è 10; si cerca la differenza. Si ha perciò $x=\frac{31-4}{10-1}=\frac{27}{9}=3$, chilometri, che Antonio percorse di meno ogni giorno.

254. Poichè, come si è veduto di sopra (253), la differenza di una progressione si ottiene dividendo il residuo della sottrazione dell'estremo minore dal maggiore per il numero dei termini diminuito d'1, così dividendo il medesimo residuo per la differenza comune della progressione si avrà un quoziente, che aumentato di 1, determina il numero dei termini della medesima progressione: onde si ha il teorema:

V. *Il numero dei termini di qualunque progressione aritmetica eguaglia l'unità più il quoziente dell'eccesso dell'estremo maggiore sul minore, diviso per la differenza o per la ragione comune.*

Dunque dati i due estremi e la differenza di una progressione aritmetica si troverà facilmente il numero dei termini, *se si sottragga il termine minore dal maggiore, si divida il residuo per la differenza, e poi si accresca il quoziente di uno.* Vediamone l'applicazione.

Esempio. — Giovanni aveva un debito, ed ottenne dal suo creditore di pagarlo a rate in più mesi, purchè aumentasse ogni mese la rata di 5 lire. Nel primo mese pagò L. 7 e nell'ultimo L. 62; per quanti mesi pagò?

La differenza della progressione è 5, il primo termine è 7 e l'ultimo 62. Dunque per trovare il numero dei termini si ha $x=\frac{62-7}{5}+1=\frac{55}{5}+1=12$, che sono i mesi, nei quali fu saldato il debito.

255. Siccome in una progressione, come si è osservato (252), vi è tante volte ripetuta la somma di due dei suoi termini equidistanti dal mezzo, quanti sono i termini della progressione stessa divisi per 2, così la somma totale della progressione presa due volte darà il numero dei termini, se si dividerà per la somma dei suoi estremi. Perciò si ha il teorema:

VI. *Il numero dei termini di una progressione aritmetica è eguale al doppio della somma di essa, diviso per la somma dei due estremi.* Dunque se si conoscono in una progressione aritmetica il primo e l'ultimo termine e la somma, si otterrà il numero dei termini *dividendo per la somma degli estremi il doppio della somma totale della progressione.* Passiamo alla pratica.

Esempio. — Dispongo 610 ambrogette in tanti ordini, che formano una progressione aritmetica. Ne metto 2 nel primo ordine e nell'ultimo 59. Quanti ordini ci sono?

Abbiamo noti il primo termine 2, l'ultimo 59 e la somma 610. Si chiede il numero dei termini; perciò $x=\frac{2\times 610}{2+59}=20$, che sono gli ordini delle ambrogette.

256. Si vede anche da ciò che in una progressione la somma degli estremi è eguale alla somma totale della progressione divisa per la metà del numero dei termini: perciò in una progressione qualunque la somma dei due estremi eguaglia il doppio della somma della progressione diviso per il numero dei termini; onde si hanno i seguenti teoremi:

VII. *Il primo termine* di una progressione aritmetica è eguale al quoziente del doppio della somma di essa, diviso per il numero dei termini, meno l'ultimo termine.

VIII. L'ultimo termine di una progressione aritmetica è eguale al quoziente del doppio della somma diviso per il numero dei termini, meno il primo termine.

Dunque I. per trovare il primo termine, conosciuti l'ultimo termine, il numero dei termini e la somma di una progressione aritmetica, *si moltiplica per 2 la somma, si divide il prodotto per il numero dei termini, e dal quoziente si sottrae l'ultimo termine.* Si ponga in pratica la regola.

Esempio. — Un giuocatore ha perduto in 12 giorni in progressione aritmetica L. 156, e nell'ultimo giorno perdè L. 24. Quanto perdè nel primo giorno?

La somma della progressione è 156, l'ultimo termine è 24 e il numero dei termini 12. Si cerca il primo termine. Dunque $x=\frac{156\times2}{12}-24=26-24=2$, che sono le lire, che perdè nel primo giorno.

II. Per avere l'ultimo termine di una progressione aritmetica, essendo noti il primo termine, il numero dei termini e la somma, il *prodotto di questa somma per 2 si divide per il numero dei termini, e dal quoziente si sottrae il primo termine.* Vediamone la pratica.

Esempio. — In 15 volte si levano in progressione aritmetica da un magazzino 840 palle da cannone. La prima volta ne furono levate 7: quante se ne levarono l'ultima volta?

Essendo noti il primo termine 7, il numero dei termini 15 e la somma 840, per trovare l'ultimo termine della progressione si ha $x=\frac{840\times2}{15}-7=105$, che tante furono le palle levate dal magazzino.

257. Due progressioni aritmetiche de'numeri naturali, l'una delle quali sia decrescente e l'altra crescente, ci

somministrano il metodo, che è fondato sopra la teoria delle serie, delle quali si parla nei trattati d'Algebra, per trovare le combinazioni di un dato numero di quantità prese a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec. Se si vogliono *per esempio* le varie combinazioni di sei quantità, formo le seguenti due progressioni naturali:

I.ª 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1
II.ª 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6

La prima decrescente sempre incomincia dal numero esprimente quello delle quantità da combinarsi, e l'altra, che scrivo sotto ai termini della prima, è crescente, ed incomincia sempre dall'unità e prosegue progressivamente secondo l'ordine naturale dei numeri. Ora desidero di sapere le combinazioni a due a due di sei quantità? Divido il prodotto dei due termini 6 e 5 della prima progressione per il prodotto dei due termini corrispondenti 1 e 2 della seconda progressione, ed ho 15 per quoziente, che determina le combinazioni binarie o gli ambi. Voglio le combinazioni a tre a tre di sei quantità? Moltiplico gli uni per gli altri, i tre termini 6, 5, 4 della prima, e divido questo prodotto per quello dei tre termini corrispondenti dell'altra 1, 2, 3; ed ho 20 per quoziente che esprime il numero dei terni. Così se si divida il prodotto dei primi quattro termini della prima progressione per il prodotto dei primi quattro dell'altra, e il prodotto dei primi cinque termini superiori per il prodotto dei primi cinque termini inferiori, si hanno nel primo caso le combinazioni a 4 a 4, e nell'altro a 5 a 5, ossia si ottiene il numero delle quaderne e delle quintine, che si trovano in sei quantità.

Dunque in generale per trovare le varie combinazioni di un dato qualunque numero di quantità, *si faccia una progressione decrescente naturale, il cui primo termine sia il numero delle quantità da combinarsi: si divida il prodotto dei due primi termini per* 2, *e si avranno gli ambi: si divida il prodotto dei tre primi termini per* 6,

e si otterranno i terni: si divida il prodotto dei primi quattro termini per 24, ed il quoziente esprimerà le quaderne e così successivamente. Passiamo all'applicazione.

Esempio. — Vi sono in una scatola 20 numeri a me noti, tre dei quali da me contrassegnati, scommetto che sortiranno alla prima estrazione. Quanto è probabile la mia vincita?

La dimanda si riduce a cercare i terni che si ritrovano nel numero 20: onde $x=\frac{20\times19\times18}{2\times3}=\frac{6840}{6}=1140$ che sono le combinazioni a tre a tre, che trovansi nel suddetto numero 20: e però la mia probabilità di vincere sta alla probabilità di perdere come 1 : 1140.

258. Quanto fin qui si è detto può bastare per avere un saggio delle progressioni aritmetiche. Si risolvano per esercizio i seguenti quesiti.

I. Un orologio batte le ore da un'ora fino alle 12 inclusivamente, cosicchè a ore 1 batte una volta, alle 2 due volte e così di seguito, e ripete ciascun'ora. Quanti sono i tocchi della campana in un giorno? Risp. Sono 78.

II. Un Generale distribuì in progressione aritmetica un premio di 1000 Lire a 20 dei suoi soldati, che i primi assalirono con buon successo il nemico; all'ultimo dette L. 20, e agli altri di più in proporzione del loro coraggio; quanto ebbe il primo e quanto uno più dell'altro? Risp. Ebbe il primo lire 80, ed uno più dell'altro lire 3,16 in circa.

III. Partono nel tempo stesso due bastimenti da un porto, e nel primo giorno percorrono ambedue 9 chilometri del loro viaggio; nel secondo giorno il primo fa 13 chilometri ed il secondo ne fa 15, e così seguitano per 8 giorni in progressione aritmetica. Quanti chilometri fa ciascuno nell'ultimo giorno, e quanti chilometri in tutto? Risp. Il primo fa nell'ultimo giorno 37 chilometri ed in tutto 184: il secondo ne fa 51 e in tutto 240.

IV. Un matematico persuase un ostinato giuocatore di lotto a non giocare cinque numeri, mostrandogli eviden-

temente la massima difficoltà di vincere in qualunque caso di tal giocata. Come potè farlo? Risp. Lo potè col paragone degli ambi, dei terni, delle quaderne e delle quintine, che contengono cinque numeri, con gli ambi, terni ec. che contengono i 90 numeri del lotto. Nei cinque numeri sono ambi 10, terni 10, quaderne 5, quintine 1. Nei 90 numeri poi vi sono ambi 4005, terni 117480, quaderne 2555190, e quintine 43949268. Qual enorme differenza tra i casi favorevoli ed i casi contrari al giuocatore!

DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

259. Esaminiamo le due seguenti progressioni *Geometriche.*

I.ª : : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512

II.ª : : 19683 : 6561 : 2187 : 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1

La prima è crescente, ed ha per quoziente o per ragione 2 (249); l'altra è decrescente, ed ha per ragione 3.

Dall'esame delle loro proprietà si deducóno vari teoremi. Noi ci limiteremo a quelli che sono più importanti, e che non oltrepassano i limiti della semplice aritmetica.

260. Qualunque termine della progressione crescente è il prodotto dell'antecedente moltiplicato per la ragione comune; così nella I.ª $16=8\times2$, e $64=32\times2$: ed ogni termine della progressione decrescente è il quoto dell'antecedente diviso per la ragione comune; così nella II.ª $81=\frac{243}{3}$, e $2187=\frac{6561}{3}$. Perciò al contrario il primo termine della progressione crescente sarà eguale al secondo diviso per la ragione; ed il primo della decrescente sarà eguale al secondo moltiplicato per la ragione. Risulta da questa osservazione:

I. Che qualunque termine di una progressione geometrica è composto del primo *moltiplicato*, se la progressione è crescente, o *diviso*, se la progressione è decre-

scente, per la ragione alzata ad una potenza indicata dal numero dei termini antecedenti, o sia dal numero de' termini della progressione meno uno, se il termine che si cerca, si consideri come se fosse l'ultimo della progressione; così nella prima progressione $64=1\times2^6=1\times64$, e nell'altra $243=\frac{19683}{3^4}=\frac{19683}{81}$.

II. Il primo termine di una progressione geometrica è composto dell'ultimo diviso, se la progressione è *crescente*, o moltiplicato se la progressione è *decrescente*, per la ragione elevata ad una potenza indicata dal numero dei termini della progressione meno uno. Così nella I.ª $1=\frac{512}{2^9}=\frac{512}{512}$, e nella II.ª $19683=1\times3^9=1\times19683$.

261. Dunque I. Per trovare un termine qualunque di una progressione geometrica, quando si conoscono il primo termine, la ragione o il quoziente, e il numero dei termini, *si alza la ragione alla potenza espressa dal numero de' termini meno uno; e per questa potenza o si moltiplica il primo termine,* se la progressione è crescente, o *si divide il primo termine*, se la progressione è decrescente. Ecco l'applicazione della regola in ambedue i casi.

Esempio I. — Un ladro triplicò sempre il suo furto, e rubò per 9 volte. La prima volta rubò 2 soldi; quanto rubò la nona volta?

La progressione è crescente, della quale sono noti il primo termine 2, la ragione 3 e il numero dei termini 9. Si cerca il nono termine. Dunque $x=2\times3^8$; onde $x=2\times6561=13122=$ L. 656,10 che è la somma rubata l'ultima volta.

Esempio II. — In una città popolata morirono di peste nella prima settimana 768 persone: cessato il morbo micidiale, dopo 8 settimane si fece il computo, che il numero dei morti diminuì sempre della metà in ciascuna settimana. Quante persone morirono nell'ultima settimana?

È questa una progressione decrescente, ove si cono-

scono il primo termine 768, la ragione 2 e il numero dei termini 8, e si domanda l'ultimo termine. Dunque $x=\frac{768}{2^7}=\frac{768}{128}=6$; che è il numero delle persone, che perirono nell'ultima settimana.

II. Per trovare il primo termine di una progressione geometrica, se siano cogniti l'ultimo termine, la ragione e il numero dei termini, *si alza la ragione alla potenza che viene indicata dal numero de' termini della progressione meno uno: per questa potenza o si divide l'ultimo termine*, se la progressione è crescente, o *si moltiplica l'ultimo termine*, se la progressione è decrescente. Vediamone un esempio.

Esempio. — Indovinate un numero a cui penso, disse un Matematico in una conversazione. È questo un numero eguale alla differenza, che passa fra i primi cinque termini di due progressioni geometriche. L'una è crescente, ed ha per quinto termine 405, l'altra decrescente, ed ha per quinto termine $1/_9$. In ambedue la ragione è 3; qual era questo numero?

Per la prima progressione è noto l'ultimo termine 405, e per la seconda l'ultimo termine $1/_9$; l'una e l'altra hanno di comune la ragione 3, e il numero dei termini 5; si cerca di ambedue il primo termine.

Dunque per la prima si ha $x=\frac{405}{3^4}=\frac{405}{81}=5$

Per l'altra si ha $x=1/_9\times3^4=1/_9\times81=9$

Perciò $9-5=4$ è il numero, a cui pensò il Matematico.

262. *Osservazione.* — Siccome le proprietà delle progressioni delle quali trattiamo, sono le stesse, o siano crescenti o decrescenti, così basterà cangiare la parola di *moltiplicare* in quella di *dividere*, o di *contenere* in quella d'*essere contenuto*, perchè i teoremi siano comuni alle due specie di progressioni geometriche: onde in seguito si considererà la progressione crescente.

263. Essendo, come di sopra si è osservato (260, I.),

qualunque estremo maggiore di una progressione, composto dell'estremo minore moltiplicato per la ragione, alzata ad una potenza, indicata dal numero dei termini della progressione diminuito di 1, sarà il termine minore contenuto tante volte dal maggiore quante unità contiene la potenza, alla quale fu elevata la radice: perciò si ha il teorema:

III. La ragione di una progressione geometrica è uguale alla radice del quoziente, che risulta dalla divisione del termine maggiore diviso per il minore, espressa dal numero dei termini della progressione meno uno.

264. Dunque per trovare la ragione di una progressione geometrica, conoscendosi i due estremi e il numero dei termini, *si divide il termine maggiore per il minore, e dal quoziente si estrae la radice del grado determinato dal numero de' termini della progressione meno uno.* Diamo la pratica di questa regola, la quale serve ancora *per inserire* un numero di medj geometrici fra due date quantità.

Esempio I. — Un vascello, che viaggiò per 6 giorni, fece nel primo giorno 8 chilometri, ed aumentò uniformemente di tanto ogni giorno il suo cammino, che nell'ultimo giorno percorse 256 chilometri. Con qual progressione si avanzò?

Abbiamo qui noti il primo termine 8, l'ultimo termine 256, e il numero dei termini 6; onde per il valor cercato si ha $x=\sqrt[5]{\frac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=2$. Dunque il vascello raddoppiava ogni giorno il suo viaggio.

Esempio II. — Si inseriscano tra $^1/_2$ e 2048 cinque medj proporzionali geometrici. È dato il primo termine $^1/_2$ e l'ultimo termine 2048; ed i medj essendo 5, il numero dei termini della progressione è 7. Si cerca la ragione: onde $x=\sqrt[6]{\frac{2048}{^1/_2}}=\sqrt[6]{4096}$: estratta la radice sesta nel modo, che adesso insegneremo (265), si ha $x=4$, per cui se si moltiplica ciascun termine antecedente, si ha la progressione : : $^1/_2$: 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048.

265. *Osservazione.* — In questo trattato non abbiamo dato il metodo di estrarre la radice dei gradi superiori alla terza potenza, il che è necessario sovente nei quesiti delle progressioni geometriche. Ma si avverta intanto, che da una potenza di grado pari può sempre estrarsi la radice quadra. Per esempio, voglio la radice ottava del numero 256. Estraggo la radice quadra ed ho 16; estraggo la radice quadra da 16 ed ho 4, e finalmente da 4 estraggo la radice quadra, ed ho 2, che è la radice ottava del dato numero 256.

Se cerco la radice 6.ª di 64, estraggo la radice quadra ed ottengo 8, da cui estraggo la radice cuba ed ho 2, che è la radice sesta di 64.

Del restante per mezzo dei logaritmi si estrae la radice di qualunque grado, come si vedrà a suo luogo (308).

266. Se si prendono sei termini della prima progressione (259), potrà osservarsi che la somma di tutti, eccettuato l'ultimo, ossia *di tutti gli antecedenti*, sta alla somma di tutti i termini, fuorchè al primo, ossia *alla somma di tutti i conseguenti*, come un antecedente qualunque al suo conseguente. Infatti $1+2+4+8+16 : 2+4+8+16+32 :: 1 : 2$, cioè $31 : 62 :: 1 : 2 :: 4 : 8$ ec. da ciò deducono gli Analisti il seguente teorema:

IV. La somma di una progressione geometrica qualunque uguaglia il prodotto dell'estremo maggiore moltiplicato per la ragione comune, diminuito dell'estremo minore, e diviso per la ragione meno l'unità.

Dunque in una progressione geometrica dati il primo e l'ultimo termine e la ragione, si trova la somma: 1.° *Moltiplicando l'estremo maggiore per la ragione:* 2.° *Sottraendo da questo prodotto l'estremo minore, e dividendo la differenza o il residuo per la ragione diminuita di un'unità.* Se ne faccia l'applicazione.

Esempio. — Ogni volta che io mi sono posto a giuocare ho sempre triplicata la mia vincita. La prima volta vinsi 3 lire, e l'ultima ne vinsi 19683; quanto vinsi in tutto?

Sono noti il primo termine 3, l'ultimo 19683 e la ragione 3. Dunque abbiamo $x=\frac{19683\times3-3}{3-1}=29523$, che sono le lire vinte in tutte le giuocate.

267. Poichè in una progressione, come si è osservato (266), la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente, e poichè si ottiene la ragione dividendo un conseguente per il suo antecedente, così ne risulterà egualmente la ragione dalla divisione della somma dei conseguenti per la somma degli antecedenti: onde si ha il teorema:

V. La ragione di una progressione geometrica uguaglia il quoziente della somma di tutti i conseguenti divisa per quella di tutti gli antecedenti.

Dunque per trovare la ragione di una progressione geometrica, essendo noti il primo termine, l'ultimo termine e la somma della progressione, *si sottragga il primo termine dalla somma, e il residuo si divida per la differenza che passa tra la somma e l'ultimo termine.* Il quoziente sarà la ragione cercata: eccone l'applicazione.

Esempio. — Un padre lascia per testamento scudi di argento 1210 da dividersi in contanti ai suoi figli con questa condizione, che il minore abbia 10 scudi ed il maggiore 810, e che le porzioni degli altri siano in progressione tra questi due. Dopo la morte di lui si vuol fare la divisione della suddetta somma. Con qual ragione si debbono fare le parti, e quanti sono i figli?

Si conoscono il primo termine 10, l'ultimo termine 810, e la somma 1210: onde si ha $x=\frac{1210-10}{1210-810}=3$, che è la ragione che determina le parti di tutti, le quali sono 10, 30, 90, 270, 810; ed in conseguenza sono cinque i figli.

268. Richiamando adesso di nuovo i primi sei termini della progressione sopraccennata (259), osservo che la somma di questi sei termini moltiplicata per la ragione meno

uno, eguaglia il prodotto della potenza della ragione stessa indicata dal numero dei termini, diminuita di un'unità e moltiplicata per l'estremo minore. Infatti $63(2-1)=(2^6-1)1$, ossia $63=64-1$. Dal che si deduce il teorema:

VI. Nella progressione geometrica la somma è eguale alla ragione elevata ad una potenza espressa dal numero de' termini, diminuita di un'unità, moltiplicata per il primo termine, divisa per la ragione comune meno uno. Dunque conoscendosi in una progressione geometrica il primo termine, il numero dei termini e la ragione, si ottiene la somma *alzando la ragione alla potenza determinata dal numero dei termini, diminuendo di uno questa potenza e quindi moltiplicandola per il primo termine, e dividendo il prodotto per la ragione meno uno*. Vediamo l'applicazione.

Esempio. — Un muratore dopo aver fatta una bellissima scala di 12 gradini non richiede altro dal padrone della casa per sua mercede, e per essere rindennizzato di tutta la spesa del materiale, che ha di suo impiegato nell'opera, che gli siano dati due centesimi per il primo scalino, sei per il secondo, diciotto per il terzo, e così di seguito in progressione tripla fino al dodicesimo scalino. Qual somma richiede?

Sono noti il primo termine 2, il numero dei termini 12 e la ragione 3. Si cerca la somma della progressione. Dunque $x=2\frac{(3^{12}-1)}{3-1}=\frac{2\times 531440}{2}=531440$ centesimi, ossiano L. 5314,40, è ciò che richiede il muratore.

269. Molti altri casi occorrono intorno alle progressioni geometriche, che io tralascio perchè troppo complicati. Qualcuno ne accennerò in seguito. Si risolvano adesso per esercizio i seguenti quesiti.

I. Un avaro, che aveva seguitato per sette anni in progressione geometrica a riporre in tanti sacchetti del denaro nel suo scrigno, un giorno vi trovò soltanto 3 scudi, che vi aveva riposti il primo anno, e 15 in altro sac-

chetto che vi aveva messi nel secondo anno. Morì quasi di dolore alla scoperta del furto. Quanti scudi aveva messo da parte nell'anno settimo? Risp. Sc. 46875.

II. Poveri miei denari! diceva uno zio. Ho sei nipoti, che vengono continuamente ad assassinarmi. Se io non triplicava a favore di ciascuno di essi un dono di lire in progressione geometrica crescente, cosicchè il maggiore che è il più ardito, non avesse avuto di parte L. 486, seguitavano tuttora ad importunarmi. Quante lire ebbe il nipote minore? L. 2.

III. Se da una cisterna piena d'acqua se ne levassero 7 ettolitri la prima volta, e sempre quadruplicando si seguitasse a levarne altri ettolitri, in maniera che l'ultima volta cavandone 7168 restasse vuota, di quanti ettolitri d'acqua sarebbe capace la cisterna? Risposta. Di ettolitri 9555.

IV. Si racconta che l'inventore del giuoco degli scacchi richiesto dal suo Principe qual ricompensa desiderasse per tale scoperta, chiedesse che nel primo quadrato della scacchiera si ponesse un granello di grano, nel secondo 2, nel terzo 4, e così di seguito in progressione dupla fino al 64mo quadrato: sembrò al Principe tenue la dimanda; ma fatto poi il calcolo si trovò che il mondo intero non somministrava tanto grano. Quanto ne chiedeva?

Risp. Ne chiedeva 18446744073709551615 granelli, e supposto che trentamila granelli siano un chilogramma sarebbero El. 8988329772781,50 in circa.

DEI LOGARITMI.

270. Se ad un numero o radice qualunque si apponga un determinato esponente (147), e quindi si calcoli il valore della corrispondente potenza, l'esponente prende il nome di *Logaritmo,* il numero che s'alza a potenza dicesi *Base,* e il valore ottenuto *Numero corrispondente.* Così nell'espressione $3^2=9$ la radice 3 è la base, l'esponente 2

è il logaritmo e il numero 9 equivalente a 3^2 è il numero corrispondente; e per esprimere la proprietà dell'esponente di essere in questo caso il logaritmo di 9, o che il 9 è il numero corrispondente del logaritmo 2, si scrive $2=\text{Log. } 9$, oppure $2=\text{L}9$; come pure per esprimere che il 9 ha per logaritmo il 2, si scrive $\text{Log. } 9=2$.

271. Il valore di un logaritmo dipende da quello della base, e varia con essa. Così se la base è 2, il logaritmo di 16 sarà 4, perchè $2^4=16$: ma se la base è 4, il logaritmo di 16 è 2, perchè $4^2=16$.

272. Ordinariamente si prende per base il numero 10, e con questa sono appunto costruite le più usuali tavole logaritmiche, che con facile disposizione danno i logaritmi dei numeri sì interi, sì rotti, dentro un limite più o meno esteso. Noi insegneremo l'uso pratico di queste tavole, dopo aver premesse le principali proprietà dei logaritmi, e l'aiuto che somministrano principalmente nelle moltiplicazioni, nelle divisioni, nell'inalzamento alle potenze e nell'estrazione di qualunque radice.

PROPRIETÀ GENERALI DEI LOGARITMI.

273. Supponiamo per fissar meglio le idee, che 3 sia la base di un sistema di logaritmi. Alzandola successivamente alle potenze seconda e quinta, si avrà $3^2=9$, $3^5=243$. Se queste due equazioni si moltiplicano l'una per l'altra, avremo $3^2\times3^5=9\times243$, (148) $3^7=9\times243$. Sarà dunque (270) $7=\text{log. } 9\times243$. Ma altresì $7=2+5$, e di più $2=\text{log. } 9$, e $5=\text{log. } 243$, dunque $\text{log. } 9\times243 =\text{log. } 9+\text{log. } 243$, cioè il logaritmo del prodotto 9×243 equivale alla somma dei logaritmi di ciascuno dei fattori 9 e 243; il che verificandosi visibilmente in qualunque altro caso simile, potrà dirsi in generale che il *logaritmo di qualunque prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei suoi fattori*. Ciò agevola la moltiplicazione, e la riduce ad una semplice somma, poichè avendosi per esempio da

moltiplicare 32,5496 per 4,8635 basterà prendere dalle tavole i logaritmi di questi due numeri e sommarli. Il numero corrispondente alla somma sarà il prodotto cercato.

274. Se riprese le predette due equazioni $3^2=9$, $3^5=243$, si divida la seconda per la prima avremo $\frac{3^5}{3^2}=$(§ 156)$3^{5-2}=\frac{243}{9}$, e sarà $5-2=\log.\frac{243}{9}$. Ma $5=\log.243$; $2=L9$ dunque $\log.\frac{243}{9}=\log.243-\log.9$, cioè *si ottiene il logaritmo di un quoziente sottraendo il logaritmo del divisore da quello del dividendo.* Con ciò si agevolano le divisioni, e si riducono a semplici sottrazioni; poichè dovendo dividere un qualunque numero per un altro, si cercherà il logaritmo del primo, se ne sottrarrà quello del secondo, e il numero che avrà per logaritmo la differenza sarà il quoziente cercato.

275. Ripresa di nuovo la prima equazione $3^2=9$, se si alza l'uno e l'altro membro ad una data potenza; per esempio alla 6^a, avremo $(3^2)^6=9^6$, ossia (160) $3^{12}=9^6$. Sarà dunque $12=2\times6=L9^6$, ovvero $6\times2=L9^6$. Ma $2=\log.9$ dunque $\log.9^6=6\log.9$, cioè *il logaritmo di una potenza eguaglia quello della radice, moltiplicato per il grado della potenza.* Con ciò l'inalzamento a qualunque potenza si riduce ad una semplice moltiplicazione: poichè basterà in tal caso prendere il logaritmo della data radice, moltiplicarlo per il grado della proposta potenza, e il numero corrispondente del prodotto sarà la potenza cercata.

276. Infine la stessa equazione dà $\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$, ossia (161) $3^{2/3}=\sqrt[3]{9}$. Sarà dunque $2/3=\log.\sqrt[3]{9}$, ma $2/3=1/3\times2=1/3\log.9$, dunque $\log.\sqrt[3]{9}=1/3\log.9$. cioè *il logaritmo di una radice equivale a quello della potenza, diviso per il grado della radice.* Con ciò mediante una semplice divisione può estrarsi qualunque radice: poichè basterà cercare il logaritmo del numero dato, dividerlo per il grado della radice cercata, e il numero corrispondente equivarrà a questa radice.

LOGARITMI ORDINARI E LORO CARATTERISTICA.

277. Si chiamano *logaritmi ordinari* quelli che appartengono al sistema in cui la base è 10; sistema il più ordinariamente in uso, e sul quale son costruite le più volgari tavole dei logaritmi.

278. Siccome (159, 2.°) $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$ ec., così su questo sistema si avrà (270) L1=0, L10=1, L100=2, L1000=3, L10000=4 ec. Dunque I.° I numeri compresi fra zero e 10, avranno un logaritmo maggior di zero, e minore di 1, e perciò tutto quanto frazionario; i numeri compresi fra il 10 e il 100, avranno un logaritmo maggiore dell'unità e minore di 2, equivalente cioè all'unità più una frazione; quelli compresi fra il 100 e il 1000 avranno un logaritmo compreso fra il 2 e il 3, cioè eguale a 2 più una frazione; quelli compresi fra il 1000 e il 10000 avranno un logaritmo compreso fra il 3 e il 4, eguale cioè a 3 più una frazione. A riserva dunque dei logaritmi dei numeri della progressione decupla 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 ec. che sono interi, i logaritmi di tutti gli altri numeri sono o totalmente frazionari, o interi uniti ad una frazione. Or la parte intera di questi logaritmi si chiama *caratteristica,* la frazionaria che suol sempre presentarsi in forma decimale, si chiama *mantissa* o *giunta.*

279. II.° Poichè la caratteristica zero appartiene ai Logaritmi dei numeri compresi fra zero e 10, i quali sono di una cifra sola, la caratteristica 1 appartiene ai logaritmi dei numeri compresi fra 10 e 100, composti perciò di 2 cifre, la caratteristica 2 appartiene ai logaritmi dei numeri compresi tra 100 e 1000, e perciò composti di 3 cifre ec.; quindi in generale *la caratteristica di un logaritmo è sempre di tante unità, quante sono le cifre del numero a cui appartiene meno una.* Così il logaritmo di 365 ha di caratteristica 2, quello di 53684 ha di caratteristica 4 ec.

280. Che se il numero sia parte intero, e parte deci-

male, cioè rotto improprio, come per esempio 563,45, la caratteristica dovrà regolarsi sulle sole cifre della parte intera, e perciò nell'addotto esempio sarà 2. Ed è infatti evidente che non ostante la parte frazionaria aggiunta al 563, tutto il numero 563,45 non cessa di esser compreso fra il 100 e 1000. Dunque il logaritmo deve esser compreso fra il 2 e il 3; dunque deve essere 2 più una frazione, ossia deve aver per caratteristica il 2. Quanto alla caratteristica dei logaritmi dei rotti propri daremo in seguito il modo di determinarla convenientemente.

281. In un modo opposto a quello, con cui dalle cifre del numero dato si conclude la caratteristica del suo logaritmo, può dalla caratteristica del logaritmo dedursi la quantità delle cifre, che competono alla parte intera del numero corrispondente, essendo chiaro che queste dovranno sempre essere una di più delle unità contenute nella caratteristica del logaritmo. Così se questa caratteristica sia 3, il logaritmo apparterrà ad un numero la cui parte non frazionaria sarà composta di quattro cifre.

282. Dal fin qui detto apparisce che la caratteristica, parte la più notabile dei logaritmi, può aversi indipendentemente dalle tavole, e col mezzo della sola ispezione delle cifre degl'interi del numero, di cui si vuole il logaritmo. Per questo motivo le tavole più accreditate non danno questa caratteristica, nè altro contengono che la parte frazionaria, o mantissa. E sulla ricerca appunto di questa parte frazionaria si raggirano unicamente i due seguenti importantissimi problemi, che immediatamente veniamo a risolvere.

PROBLEMA PRIMO DIRETTO.

Dato un numero qualunque trovare il suo logaritmo.

283. Fra le tavole logaritmiche, le più conosciute e più in uso sono quelle del *Gardiner*, che danno i logaritmi imme-

diati de' numeri da 1 fino a 1000 con 20 decimali, e da 1000 fino a 108000 con 7 cifre decimali. Ma come nelle comuni occorrenze che possono incontrarsi nell' aritmetica non bisogna nè tanta estensione nè tanta precisione, noi per maggior comodo, specialmente dei giovinetti alle nostre cure affidati, le abbiamo ridotte in minor volume, e poste alla fine della presente operetta, limitandone fino a 10000, e riducendole a sole sei decimali. Le pratiche che adesso insegniamo spettano all' uso di questo piccol compendio.

284. Vogliasi dunque in primo luogo il logaritmo di un numero non maggiore di 1000. Se esso sia minore di 100 ne troveremo con facilità il logaritmo nella prima pagina della Tavola, di fianco al numero dato, che dovrà cercarsi in una delle Colonne N. Così avremo L58=1,763428; L6=0,778151.

285. Se il numero è compreso fra il 100 e il 1000, come per esempio 245, ne segno prima la caratteristica 2 (278); poi cerco come sopra il numero proposto nella prima colonna N delle tavole, adiacente al quale nella colonna che segue, e segnata in fronte con uno zero, trovo 389166, che è la parte decimale o mantissa del logaritmo cercato. Unita questa alla caratteristica 2, e niente attendendo in questo caso al punto che divide le due prime cifre dalle quattro rimanenti, del che siamo ora per dare la spiegazione, avremo 2,389166 logaritmo totale del numero 245.

286. Se poi il numero dato supera il 1000, ma non il 10000 ultimo limite delle nostre piccole tavole, come per esempio se debba cercarsi il logaritmo di 7428, segnata al solito la caratteristica 3, cerco nella colonna N il numero 742 formato dalle tre prime cifre: prendo dalla colonna adiacente le due cifre 87 che trovo separate col mezzo di un punto dalle quattro rimanenti. In luogo di queste pongo di seguito all' 87 le cifre 0872, che in linea del 742 trovo nella colonna 8 corrispondente alla quarta cifra del numero dato, e formo così l'intera mantissa 870872, che unita alla caratteristica dà per il logaritmo cerca-

to 3,870872. Con questo sistema troveremo:

L5646=3,751741
L6481=3,811642
L4920=3,691965

Osservazione.— Talvolta le due cifre iniziali, che soglion chiamarsi anche *comuni,* perchè appartengono a più logaritmi, si trovano isolate, come accade per esempio al numero 4787, e in questo caso il verso superiore è troncato alla colonna 6, l'inferiore comincia dalla colonna 7, e le suddette iniziali non hanno alcun numero in linea nella colonna N. Ciò spiega che le iniziali 67 del verso superiore hanno luogo fino al numero 4786 inclusivamente, ed al numero 4787, cominciano ad aver luogo le iniziali 68 del nuovo verso inferiore. Laonde si ha L4786=3,679973; L4787=3,680063. Con questo sistema troveremo L4366=3,640084; L1863=3,270213; L6168 =3,790144.

287. Se il numero passa il mille, ma le sole sue prime quattro cifre sono significative, e le altre zero come 365800, si segnerà al solito la caratteristica competente, che nel nostro caso sarebbe 5 (278): e quanto alla mantissa si prenderà quella del numero espresso dalle quattro cifre significative. Si avrà dunque nel nostro caso, L365800 =5,563244. Infatti poichè 365800=3658×100 sarà (273) L365800=L3658+L100=3,563244+2 (278) =5,563244. Che se poi il numero sia composto di cifre qualunque, ma multiplo (38), e quindi sia decomponibile in fattori purchè minori di mille, lo risolvo in questi fattori, dei quali cerco in seguito i logaritmi e gli sommo, è chiaro che questa somma sarà il logaritmo del numero dato (273). Così, se si abbia 1679736 prodotto di 358 in 4692, avremo:

L358 =2,553883
L4692=3,671358

Somma=6,225241 log. cercato.

288. Ma se voglia operarsi più brevemente, come pure se il numero proposto non fosse decomponibile nel modo suddetto, se ne riterranno le prime quattro cifre, e si sostituiranno degli zeri in luogo delle rimanenti. Così ripreso il numero dell'esempio precedente, cioè 1679736, rigettate le ultime tre cifre si formerà l'altro 1679000. Di questo numero si cercherà il logaritmo (287), come pure di 1680000, cioè del numero che supera l'altro di un'unità nella quarta cifra significativa; e infine si stabilirà la differenza fra questi due logaritmi. Troveremo frattanto:

$$\begin{array}{r} L1679000 = 6,225051 \\ L1680000 = 6,225309 \\ \hline \text{Differenza} \;\;.\;\;.\;\; 258 \end{array}$$

Quindi si dirà: se mille di differenza fra i due numeri ne porta 258 nei loro logaritmi, che differenza porterà il divario di 736 che passa fra il numero proposto e 1679000? Istituita questa proporzione si avrà $1000:258::736:x =189,888$ quantità che trascurati i decimali dovrà aggiungersi al logaritmo di 1679000 per aver quello di 1679736, onde avremo infine L1679736=6,225241 come sopra (287).

289. Questa regola si riduce in pratica alla seguente: si cerchi il logaritmo del numero espresso dalle sole prime quattro cifre del numero dato, apponendogli però la caratteristica che è dovuta a tutto il numero intero, si prenda la differenza, che chiameremo D, fra questo logaritmo e quello del numero seguente; questa differenza si moltiplichi per il numero espresso dalle cifre che nel dato sono al di là della quarta, dal prodotto si rigettino tante cifre a destra quante sono quelle, per cui è moltiplicata la differenza D, e le rimanenti daranno ciò che deve aggiungersi al logaritmo già preso nella tavola per aver quello del numero dato.

Per darne un altro esempio sia da cercarsi il logaritmo di 297358.

Avremo L2973=5,473195
L2974=5,473341

Differenza 146

Ora 146 moltiplicato per 58, numero composto dalle due ultime cifre del dato, rende in prodotto 8468, dal quale rigettate le due ultime cifre, si ha, corretto l'errore, il resto 85, che aggiunto al logaritmo di 2973 dà per logaritmo del numero dato L297358=5,473280.

290. Poichè la differenza fra i logaritmi di due numeri consecutivi si mantiene per qualche tempo costante, o non varia che di un'unità nell'ultima cifra, così dalla prima pagina e metà della seconda in poi, le tavole l'assegnano da sè medesime nell'ultima colonna intitolata D, il che abbrevia anche più l'operazione, e la riduce alla pratica seguente.

Segnata la caratteristica conveniente al numero dato, si scriva il logaritmo o per meglio dire la mantissa propria delle sole sue prime quattro cifre, e si prenda la differenza D che vi corrisponde in linea o superiormente. Questa si moltiplichi in primo luogo per la 5.ª cifra del numero proposto, poi per la 6.ª e così successivamente, segnando i prodotti sotto il logaritmo già scritto, scalati secondo le regole che si usano nella moltiplicazione, allorchè si opera dalla sinistra alla destra, e conforme si vedrà praticato nell'esempio seguente. Infine tutto si sommi, e rigettate dalla somma le cifre al di là della 6.ª decimale, ciò che rimane sarà il logaritmo cercato.

Applichiamo questa pratica all'esempio del numero precedente

L297358=5,473195 D=146
prodotto di D per 5= 730
per 8= 1168

Somma 5,47327968

Onde log. 297358=5,473280

Aggiungiamo anche un nuovo esempio, e si cerchi il logaritmo di 6825729; si avrà

L6825729=	6,834103	D=64
prodotto di D per 7=	448	
per 2=	128	
per 9=	576	
Somma	6,834149656	

Onde L6825729=6,834150

Da questa pratica si rende evidente che non può aversi con bastevole precisione fino alla sesta cifra decimale il logaritmo di un numero che superi il milione. Quando abbisognasse, si esigono tavole più estese, e conviene ricorrere a quelle di *Gardiner,* le quali pure cesserebbero di potere impiegarsi se il numero fosse maggiore di 10 milioni.

291. Debba adesso trovarsi il logaritmo di un rotto. Se questo è improprio si sottrarrà il logaritmo del denominatore da quello del numeratore, e la differenza sarà il logaritmo cercato. Così per il rotto $^{15}/_{4}$ avremo

L15=1,176091
L4 =0,602060
Diff.=0,574031=L$^{15}/_{4}$

Tutto ciò è visibilmente conforme alla regola già dichiarata a suo luogo (274).

292. Ma se il rotto è proprio, è manifesto che la differenza verrà negativa; d'onde resulta che i logaritmi dei rotti propri sono necessariamente negativi, nè potranno perciò trovarsi fra quelli delle tavole, ove son tutti positivi. Occorrendo dunque di trovare il numero corrispondente, onde avere il valore del rotto, le tavole non sarebbero quindi sufficienti. Per evitar quest'inconveniente, allorchè il rotto è proprio, o in generale allorchè in forza del precetto dato (274) deve sottrarsi un logaritmo maggiore da uno minore, si aggiunga una o più diecine alla

caratteristica del minore, nel qual caso divenendo più grande dell'altro, la sottrazione è possibile, e il resto risulta positivo. Conterrà per altro una caratteristica maggiore del vero di 10 unità; quindi nello stabilire la quantità degl'interi competenti al numero corrispondente (281), saranno necessarie altre avvertenze diverse dalle già date (ivi), e che insegneremo in breve a suo luogo. Qui intanto avvertiremo, che quest'eccesso di caratteristica contenuto nel logaritmo così risultato, si chiama *complemento aritmetico.* Del resto questo complemento non avrà mai luogo se il rotto è improprio.

293. Se il rotto è decimale e contiene interi, ed è quindi improprio, come per esempio 39,458, poichè ridotto in ordinario diviene $\frac{39458}{1000}$, sarà dunque $L39,458 = L\frac{39458}{1000}$ $= L39458 - L1000$. Ora $L39458 = 4,596135$ e $L1000 = 3$ (278), dunque $L39,458 = 1,596135$, dal che si vede che il logaritmo del rotto 39,458 non differisce da quello dell'intero 39458 che nella caratteristica, la quale in luogo di 4 è in questo caso 1, quella cioè che competerebbe al solo numero delle cifre degl'interi contenuti nel rotto proposto. Concluderemo dunque che il logaritmo di un rotto decimale con interi, si ha ponendo la caratteristica competente ai soli interi, e la mantissa competente a tutto il numero considerato come se non fosse decimale. Così troveremo $L458,36 = 2,661207$; $L3634,53 = 3,560448$; $L3,8691 = 0,587610$.

294. Se poi il rotto decimale non contiene interi, ma ha significativa almeno la sua prima cifra, come 0,36412, avremo $L0,36412 = L\frac{36412}{100000} = L36412 - L100000 = 4,561245$ $- 5$ cioè, aggiunto il complemento aritmetico (292) 9,561245. Quindi il *logaritmo di un decimale con punti interi e con la cifra dei decimi significativa, si ha ponendo* 9 *di caratteristica, e la mantissa competente al numero totale considerato come un intero.*

295. Che se anche i decimi fossero zero come 0,04562 si avrebbe L0,04562=L4562—L100000=3,659155—5 onde 13,659155—5=8,659155; cioè in tal caso la caratteristica sarebbe 8, e il resto, ciò che appartiene al numero dato considerato come intero.

Così si troverebbe che se mancassero anche i centesimi, la caratteristica sarebbe 7 ec. In generale può stabilirsi che *per avere il logaritmo di un rotto proprio decimale, si considererà questo rotto come se fosse un intero, ossia senza attendere al suo denominatore* (293) *nè agli zeri che può avere in principio; sotto quest'aspetto se ne cercherà il logaritmo, a cui si apporrà per caratteristica un numero di unità, tanto al di sotto del 10, quanti sono gli zeri con cui comincia il decimale dato, compreso quello che precede la virgola.* Così troveremo L0,03256 =8,512684; L0,00053=6,724276.

PROBLEMA SECONDO INVERSO.

Dato un logaritmo trovare il numero corrispondente.

296. Il logaritmo proposto, di cui si cerca il numero corrispondente, o si trova esattamente fra quelli delle tavole, o non vi si trova; e nell'un caso e nell'altro, o ha un complemento aritmetico o non lo ha. Diamo per ciascuno di questi casi le regole da tenersi.

297. I. Se il logaritmo dato si trova esattamente fra quelli delle tavole, e di più tra quelli della prima colonna il numero che gli sta di fianco nella colonna N, sarà il cercato, purchè gli si diano quelle sole cifre d'interi che competono alla caratteristica, cioè una di più del valore della caratteristica stessa. Così se sia dato il logaritmo 1,372912, il numero corrispondente sarebbe 23,6; attesochè la caratteristica 1 indica due cifre di interi nel numero corrispondente (281). Egualmente si avrà 0,698101

=L4,99; mentre 2,354108=L226 senza alcun decimale, perchè la caratteristica 2 vuole tre cifre di interi. Qualora poi la caratteristica esigesse più di tre cifre di interi, se ne completerà il numero con aggiungere quanti zeri bisognano alla destra del numero trovato. Così avremo 4,820202=L66100; ed infatti L66100=L661×100= (273) L661+L100= (278) 2,820202+2=4,820202.

298. Che se nella prima colonna non si trovino che le due sole cifre iniziali della mantissa, e le altre 4 rimanenti si trovino in una delle colonne successive, come accade al logaritmo 2,364739, rapporto al quale le cifre 4739 si trovano nella colonna 6, allora si prenderà nella colonna N il numero 231, che si trova in linea del 4739, e gli si aggiungerà alla destra la cifra 6 corrispondente alla colonna in cui è il 4739, e se ne formerà il numero 2316; onde separate tre cifre di interi convenienti alla caratteristica 2, concluderemo che 2,364739=L231,6. Troveremo in tal guisa 0,143327=L1,391; 2,315130=L206,6.

299. II. Se il logaritmo non si trova in modo alcuno fra quelli delle tavole, come per esempio 2,438392, cercheremo nelle stesse tavole il logaritmo inferiore più prossimo, che nel nostro caso sarebbe 2,438384, che ha per numero corrispondente 274,4; prenderemo la differenza 158, che passa fra questo e il seguente, che spetta al numero 274,5; infine prenderemo la differenza 8 tra il logaritmo proposto e il predetto logaritmo inferiore. Quindi diremo, se 158 di differenza fra i due logaritmi successivi della tavola, ne porta 0,1 fra i loro numeri corrispondenti, la differenza 8 fra il logaritmo inferiore ed il proposto, qual differenza porterà fra il numero 274,5 corrispondente al predetto logaritmo inferiore e il numero corrispondente al logaritmo proposto? ossia istituiremo la proporzione $158 : 0,1 :: 8 : x = \frac{0,8}{158} = 0,05$: quantità che aggiunta al numero 274,5 darà 274,55 che sarà il numero corrispondente cercato. In tal guisa troveremo 3,486512= L3065,577; 0,634821=L4,31341.

Quest'operazione in pratica può ridursi alla seguente; trovato il logaritmo inferiore si prenda 1.° la differenza fra questo e il logaritmo proposto; 2.° fra il logaritmo inferiore e quello che vien dopo; 3.° si divida la prima differenza per la seconda, e le cifre che si avranno in quoziente aggiunte alla destra del numero corrispondente al logaritmo inferiore, daranno il numero corrispondente del logaritmo proposto.

300. Si noti 1.° che quantunque le cifre del quoziente così trovato risultino sempre decimali, tuttavia poste accanto alle precedenti prenderanno il valore che loro competerà secondo la quantità della caratteristica; 2.° che il quoziente non dovrà spingersi più oltre delle due prime cifre: ciò che si aggiungesse di più sarebbe inesatto: onde 3.° il numero corrispondente dato dalle tavole non può oltrepassare 6 cifre, comprese le decimali. Anzi non ostante questa riserva, l'ultima cifra avrà sempre qualche poco d'inesattezza. Nei più dei casi però neppure questa quantità di cifre si troverà essere tutta necessaria.

301. III. Se infine il logaritmo proposto contenga un complemento, tutto anderà come sopra rapporto alla ricerca del numero corrispondente: e solo vi sarà differenza nello stabilimento della virgola, o dei decimali, per i quali si dovrà tenere la regola seguente: cioè *che dovranno premettersi al numero corrispondente dato dalle tavole tanti zeri, compreso quello degli interi, quante sono le unità di cui la caratteristica differisce da 10.* Così se la caratteristica è 9, dovrà premettersi uno zero al luogo degli interi, quindi la virgola e poscia il numero dato dalle tavole; se è 8, dovrà premettersi lo zero per gli interi, un altro zero in luogo dei decimi, e quindi il numero delle tavole, e così di seguito. Così troveremo 9,058456=L0,1144079; 8,325641=L0,0211661; 6,426312=L0,000266873. Del resto questa regola è visibilmente fondata sul principio, su cui altrove (295) stabilimmo la regola inversa.

APPLICAZIONE DEI LOGARITMI.

302. Gli esempi con cui abbiamo illustrate le precedenti dottrine, sono certamente bastevoli per ben comprenderne i fondamenti e la natura. Ma perchè i giovani possano meglio comprenderne gli usi, e assuefarsi a cavarne il conveniente partito nei diversi quesiti, aggiungeremo alle già date anche le seguenti applicazioni, che hanno anche il vantaggio di dar luogo a casi suscettivi di nuovi schiarimenti.

303. *Moltiplicazione.* — Si cerca il prodotto di 0,043268 per 2,63451.

Si avrà L0,043268=8,636167
L2,63451 =0,420700
Somma =9,056867=L0,113990

conforme si sarebbe ottenuto, ma con molta maggior fatica dalla moltiplicazione.

E qui si avvertirà di passaggio, che qualora occorra di sommare più logaritmi con complemento, e che la caratteristica della somma venga così a contenere una o più diecine, queste potranno rigettarsi, e dovrà considerarsi un solo complemento nel logaritmo che resta. Così se debba moltiplicarsi

0,063483×0,32963×0,43654×2,3265, avremo
L0,063483=8,802657
L0,32963 =9,518027
L0,43654 =9,640024
L2,3265 =0,366703
Somma =8,327411=L0,0212525.

304. *Divisione.* — Vogliasi dividere 0,96342 per 4,32693: avremo

L0,96342=9,983816
L4,32693=0,636451

Differenza =9,347365=L0,222518.

In quest'esempio il logaritmo superiore conteneva un complemento (292), l'inferiore non lo conteneva; dunque il complemento è necessariamente anche nella differenza, sul quale gli interi del numero corrispondente sono stati regolati.

305. Ma se anche l'inferiore contenesse un complemento, allora nella sottrazione l'uno resterebbe eliminato dall'altro, e la differenza non ne conterrebbe, meno il caso che il logaritmo inferiore eccedesse il superiore, e si rendesse necessaria per sottrarre l'aggiunta di un nuovo complemento. Debbasi per esempio dividere 0,36516 per 0,04831

avremo L0,36516=9,562483
L0,04831=8,684037

Diff. senza compl.=0,878446=L7,55868 quoz. cercato.

Debbasi dividere 0,036419 per 0,13568
avremo L0,036419=8,561328
L0,13568 =9,132516

Diff. con complem.=9,428812=L0,268418 quoz. cercato.

306. *Formazione delle Potenze.* — Si voglia la quarta potenza di 31: avremo L31=1,491362, che moltiplicato per 4 (275), darà 4×L31=5,965448=L923524 potenza richiesta, inesatta soltanto nell'ultima cifra (300).

Vogliasi la decima potenza di 1,05. Avremo $L1{,}05^{10}$ =10×L1,05=10×0,021189=0,211890=L1,62888, potenza richiesta.

307. Se si tratti di un rotto proprio, il cui logaritmo contenga un complemento, il prodotto ne conterrà altrettanti quanto è il valore dell'esponente per cui si è moltiplicato. In tal caso dovranno rigettarsi come superflue le

diecine che si troveranno nella caratteristica del prodotto, e ritener soltanto le unità; con che i complementi si ridurranno ad un solo, per il quale si opererà secondo il solito nella ricerca del numero corrispondente (301). Abbiasi da trovare la quinta potenza di 0,7342, sarà $L0,7342^5$ $=5L0,7342=5\times9,865814=9,329070=L0,213339$.

308. *Estrazione di radice.* — Abbiasi da estrar la radice quinta da 53782. Sarà $L53782=4,730637$, che diviso per cinque secondo la data regola darà 0,946127, il cui numero corrispondente è 8,8334, che sarà perciò la radice quinta richiesta.

309. Se si tratta di un rotto proprio, il cui logaritmo includa perciò un complemento (292), dovremo prima di far la divisione aggiungere tanti nuovi complementi quanti son necessari, perchè con quello già esistente nel logaritmo eguaglino il grado della radice richiesta. Così se debba estrarsi la radice terza da 0,46321, il cui logaritmo è 9,665778 con un complemento, ne aggiungerò due altri, ed avrò 29,665778 con tre complementi; quindi dividendo per 3, grado della radice, verrà $9,888593=L0,77374$. La ragione di quest'operato è, che siccome nel far le potenze di un rotto si sopprimono in ultimo le diecine della caratteristica, con che si vengono a toglier tanti complementi quante unità sono nell'esponente della potenza meno una (307); così nell'estrazione della radice, nella quale si deve operare in tutto inversamente, si dovrà cominciare dall'accrescer la caratteristica di tanti complementi o di tante diecine, quanto è il grado della radice diminuito di un'unità.

310. *Regola del tre.* — Si cerca il quarto proporzionale geometrico dopo i tre termini 5349, 4639 e 0,8538. Si sa (184) che il quarto cercato è $x=\frac{4639\times0,8538}{5349}$. Dunque $Lx=L4639\times0{,}8538-L5349$ (274); ma $L4639\times0,8538$ $=L4639+L0,8538$ (273), dunque $Lx=L4639+L0,8538$ $-L5349$, cioè il termine estremo cercato si avrà som-

mando i logaritmi dei due medj, togliendo dalla somma il logaritmo dell'altro estremo dato, e quindi cercando il numero corrispondente della differenza. Avremo perciò

$$\begin{array}{l} L4639\ =3,666424 \\ L0,8538=9,931356 \\ \hline \qquad\quad 3,597780 \\ L5349\ =3,728273 \\ \hline \qquad\quad 9,869507=L0,740471 \text{ quarto ter. cercato.} \end{array}$$

311. *Regole d'interesse composto.* — I. Furono impiegati ad interesse composto del 5 $^3/_4$ per $^0/_0$ per anni 9, Lire 385,50. Qual somma x si dovrà riscuotere dopo il detto tempo tra frutti e capitale? Ridotto il frutto a 5,75, si sa (200, III.) che avremo $x=385,5\times1,0575^9$. Dunque $Lx=L385,5+L1,0575^9=$ (275) $L385,5+9L1,0575$. Ora $L1,0575=0,024280$: dunque

$$\begin{array}{l} 9L1,0575=0,218520 \\ \ L385,5\ =2,586024 \\ \hline \text{Somma } 2,804544= L.637,594 \text{ somma richiesta.} \end{array}$$

II. Un capitale impiegato ad interesse composto al 5 $^3/_4$ per $^0/_0$ è salito a L. 637,59 $^2/_5$ in 9 anni. Qual fu in principio?

Avremo (200, VI) $x=\frac{637,594}{1,0575^9}$. Dunque $Logx=L637,594-9L1,0575$: or come sopra

$$\begin{array}{l} L637,594=2,804544 \\ 9L1,0575\ =0,218520 \\ \hline \text{Differenza } 2,586024=L385,50 \text{ capitàle cercato.} \end{array}$$

III. Un capitale di L. 385,50 impiegato al 5 per $^0/_0$ è salito a lire 637,59 $^2/_5$; per qual tempo x è stato impiegato?

Dovrà aversi (200, III) $637,594=385,50\times1,0575^x$ ossia come è chiaro $1,0575^x=\frac{637,594}{385,50}$. Di qui $xL1,0575=L637,594$

$-L385{,}50$ ed $x=\frac{L637{,}594-L385{,}50}{L1{,}0575}$

Ora L637,594=2,804544
L385,50=2,586024

Diff. 0,218520

L1,0575=0,024280: dunque $x=\frac{0{,}218520}{0{,}024280}$

e quindi $Lx=L0{,}218520-L0{,}024280$.

Ora L0,218520=9,339491
L0,02428 =8,385249

0,954242=L8,9999=L9

tempo cercato, come doveva aversi.

IV. Si vorrebbe che un capitale di lire 385,50 impiegato al frutto composto salisse in 9 anni a lire 637,594. A qual frutto dovrà impiegarsi?

Chiamato x il valore di una lira più il suo frutto, avremo (176. III) $385{,}50\times x^9=637{,}594$ e quindi $x^9=\frac{637{,}594}{386{,}50}$. Dunque $9Lx=L637{,}594-L385{,}50$ e quindi $Lx=\frac{L637{,}594-L385{,}50}{9}$.

Ora L637,594=2,804544
L385,50=2,586024

Differenza 0,218520

9 / 0,024290=L1,0575 valore di x o di una lira più il suo frutto. Dunque il frutto di una lira sarà 0,0575, e quello di 100 lire 5,75 ossia 5 $^3/_4$.

312. Riducendo in termini le operazioni fatte nei quattro precedenti casi, diremo:

I. Che volendo sapere quanto diverrà tra frutti e capitale una somma impiegata per un tempo determinato ad un dato frutto, si troverà prima, secondo la regola, (200, III) il valore di una lira aumentato del suo frutto corrispondente. Di questo valore si cercherà il logaritmo, che si moltiplicherà per il tempo dato; al prodotto si aggiungerà il

logaritmo del dato capitale, e il numero corrispondente sarà l'ammontare richiesto.

II. Se è dato l'ammontare, il tempo e l'impiego a frutto, e si cerca il capitale primitivo, si prenderà il logaritmo dell'ammontare, se ne sottrarrà quello di una lira più il frutto moltiplicato per il tempo, si cercherà il numero corrispondente della differenza, e questo sarà il capitale primitivo.

III. Se è dato il capitale, l'ammontare ed il frutto, e si vuole il tempo, si sottrarrà il logaritmo del capitale da quello dell'ammontare, si prenderà il logaritmo della differenza, da questa si sottrarrà il logaritmo del logaritmo della quantità equivalente ad una lira più il frutto, e il numero corrispondente sarà il tempo cercato.

IV. Se infine è dato il capitale, l'ammontare ed il tempo, e si cerca il frutto da assegnarsi, si sottrarrà il logaritmo del capitale dato da quello dell'ammontare voluto; si dividerà la differenza per il tempo; si cercherà il numero corrispondente, che diminuito di uno e moltiplicato per cento darà il frutto richiesto.

313. *Conversione e riduzione delle misure pesi e monete antiche in misure, pesi e monete nuove e viceversa per mezzo dei logaritmi.* Si sa che per convertire le misure pesi e monete di una specie in quelle di un'altra, bisogna conoscerne prima il rapporto, che si ottiene cercando quante unità della specie che vuol ridursi entrano in una o più unità di quelle a cui vuol farsi la riduzione. Stabilito questo rapporto, deve per esso moltiplicarsi il numero dato della specie, che vuol ridursi, e si ha in prodotto l'equivalente espresso in unità dell'altra specie cercata. La piccola tavola, che abbiamo posta in fine, somministra i logaritmi dei rapporti delle più usuali misure, pesi e monete vecchie italiane alle corrispondenti moderne, e rende facilissime le conversioni di cui parliamo. I quesiti di questo genere posson ridursi a tre capi: 1.° Quando si tratta di ridurre una data specie vecchia ad una

specie nuova o comunque diversa. 2.° Quando si tratta di ridurre una specie nuova in una vecchia. 3.° Quando si tratta di ridurre una nell'altre di due specie antiche qualunque, delle quali la Tavola somministri il logaritmo di rapporto con l'unità metrico decimale.

Nel primo caso si cercherà il logaritmo della specie vecchia data da ridursi; questo si sommerà col logaritmo di rapporto preso dalla Tavola corrispondente alla qualità della specie nuova, alla quale vuol ridursi la data specie vecchia; e il numero corrispondente della somma darà la specie decimale equivalente alla data specie vecchia.

Nel secondo caso, si cercherà il logaritmo della data specie nuova, da questo si sottrarrà il logaritmo di rapporto della medesima specie preso dalla Tavola, e il numero corrispondente della differenza darà la specie vecchia equivalente alla specie nuova data.

Nel terzo caso si cercherà il logaritmo della specie o quantità data da convertirsi, si sommerà con il logaritmo della Tavola corrispondente a questa medesima specie; dalla somma si sottrarrà il logaritmo della Tavola proprio della specie, a cui vuol ridursi la prima, e il numero corrispondente del resultato darà le quantità della prima specie ridotte in unità della seconda. Gli esempi rischiareranno meglio questi precetti.

I. Vogliansi convertire B.ª fior. 358 e 3 soldi, ossia B.ª 358,15 in metri. Avremo:

LB.ª 358,15 . . . . =2,554065
Ldi rapporto pei metri . . . . =9,766135

Somma . . . =2,320200=L209,02

Onde B.ª fiorentine 358 e 3 soldi corrispondono a metri 209,02.

II. Vogliansi convertire metri 209,02 in B.ª fiorentine. Si avrà:

Lmetri 209,02	=2,320200
Ldi rapporto pei metri	=9,766135
Differenza . .	=2,554065=L358,15

Onde metri 209,02 corrispondono a B.ª 358,15 ossia à B.ª 358 e soldi 3 fiorentine.

III. Vogliansi convertire rubbi romani 168 in quadrati toscani. Avremo

L rubbi 168	=2,225309
L di rapporto per i rubbi . .	=2,266805
Somma . .	=4,492114
L di rapporto per i quadrati . .	=1,532269
Differenza . .	=2,959845=L911,69

cioè 168 rubbi equivalgono a quadrati toscani 911,69.

NOZIONI ELEMENTARI

DI

GEOMETRIA PRATICA.

§ 1. — Linee.

1.ª *D.* Che cosa è la Geometria pratica?

R. È l'arte di valutare l'estensione dei corpi, nei quali si considerano tre dimensioni: *lunghezza, larghezza* e *altezza.*

2.ª *D.* Che intendete per *linea,* e che per *punto?*

R. La linea è una lunghezza senza larghezza e altezza, come AB (Fig. 1.). Il punto è l'estremità della linea, come A o B: e perciò il punto non ha nè lunghezza, nè larghezza, nè altezza.

3.ª *D.* Di quante specie è la linea?

R. Di due: *retta* e *curva.*

4.ª *D.* Quando una linea dicesi retta e quando curva?

R. La linea dicesi retta, quando è diritta; cioè non presenta nel suo andamento nessuna piegatura; come AB (Fig. 1.): dicesi curva, quando è piegata; come AC o AD (Fig. 2.).

5.ª *D.* Oltre la linea retta e curva, vi sono altre specie di linee?

R. Vi è la *spezzata* e la *mista.* La spezzata è una linea composta di più linee rette, come ABCD (Fig. 3.); la mista è una linea composta di rette e di curve, come ABCDE (Fig. 4.).

6.ª *D.* Qual è la linea più corta che si possa tirare fra due punti dati?

R. È la linea retta; e perciò serve a misurarne la distanza.

7.ª *D.* Come si dividono le linee per riguardo alla loro direzione?

R. Si dividono in *verticali, orizzontali* e *oblique.*

8.ª *D.* Che cosa è una linea verticale?

R. È una linea retta che scende d'alto in basso con la direzione del filo a piombo, come AB (Fig. 5.).

9.ª *D.* Che cosa è una linea orizzontale?

R. È una linea retta giacente in modo che non pende verso terra nè da una parte nè dall'altra, come AB (Fig. 6.)

10.ª *D.* Che cosa è una linea obliqua?

R. Obliqua dicesi una linea retta che non è nè verticale, nè orizzontale, come CD (Fig. 7.).

11.ª *D.* Che intendete per linee parallele?

R. Due linee che conservano sempre fra loro la medesima distanza, o che prolungate quanto si voglia non s'incontrano mai, come AB e CD (Fig. 8.).

§ II. — **Misura della linea.**

1.ª *D.* Che vuol dire misurare una linea?

R. Vuol dir cercare quante volte vi è contenuta un'altra linea che si chiama *unità di misura,* o *misura.*

2.ª *D.* Qual lunghezza si prende per unità di misura?

R. Si può prendere una lunghezza qualunque: ma perchè non nasca confusione, ogni paese suole avere una misura fissa. Per l'Italia questa misura è il *metro:* il metro si divide in dieci parti eguali chiamate *decimetri:* ogni decimetro si divide in dieci parti eguali chiamate *centimetri:* e ogni centimetro si divide in dieci parti uguali chiamate *millimetri.*

3.ª *D.* A che serve quell'arnese chiamato *seste* o *compasso ?*

R. Serve anch'esso per misurare le linee quando si vuol prendere per misura una lunghezza qualunque.

4.ª *D.* Sapreste indicarmi come è formato il compasso?

R. È formato di due aste o gambe di metallo o di legno, terminate a punta, e riunite mediante un pernio intorno a cui girano liberamente. Aprendole più o meno, si ha quella lunghezza che più ci piace.

5.ª *D.* Quando si è misurata una linea col compasso, si può ridurre la sua lunghezza a una misura nota, per esempio al metro?

R. Si può benissimo. Dopo aver misurato la linea si portano le due punte del compasso sul metro, e si guarda di quanti decimetri o centimetri o millimetri son distanti fra loro; e per questi si moltiplica il numero dei passi di compasso fatti sulla linea.

§ III. — **Angolo.**

1.ª *D.* Da che è formato l'angolo?

R. L'angolo è formato da due rette che s'incontrano in un punto (Fig. 9.). Questo punto si chiama *vertice* dell'angolo; e le due rette *lati.*

2.ª *D.* Come si legge l'angolo?

R. Avendo segnato una lettera al vertice, ed una all'estremità di ciascun lato, si può leggere o con la sola lettera del vertice, o con tutte e tre, purchè però si ponga in mezzo la lettera del vertice: dicendo, per esempio, BAC o CAB, e non già ABC o ACB (Fig. 9.).

3.ª *D.* Di quante specie è l'angolo?

R. Di tre: *retto, acuto* e *ottuso.*

4.ª *D.* Quand'è che l'angolo dicesi retto?

R. Quando è formato da una *perpendicolare* o *normale,* come BAC o BAD (Fig. 10.).

5.ª *D.* Che s'intende per normale o perpendicolare?

R. S'intende una retta che ne incontra un'altra, senza pendere più da una parte che dall'altra, come AB (Fig. 10.).

6.ª *D.* Quando l'angolo si dice ottuso, e quando acuto?

R. Si dice ottuso, quando è maggiore dell'angolo retto, come BAC (Fig. 11.): acuto quando è minore, come EDF (Fig. 12.).

7.ª *D.* Che si richiede perchè due angoli siano eguali tra loro?

R. Si richiede che l'apertura dei lati d'uno sia eguale all'apertura dei lati dell'altro.

8.ª *D.* Dunque non è necessario per l'eguaglianza degli angoli che i loro lati siano di egual lunghezza?

R. Non è necessario: basta che sia eguale la loro apertura.

9.ª *D.* Che cosa è la squadra?

R. È un arnese composto di due regoli di legno o di metallo messi insieme ad angolo retto (Fig. 13.).

10.ª *D.* A che serve la squadra?

R. Serve a formare quando si vuole un angolo retto; ovvero a conoscere se un angolo dato è retto o no.

§ IV. — **Misura dell'Angolo.**

1.ª *D.* Come si misura l'angolo?

R. Si misura con archi di *circonferenza.*

2.ª *D.* Che cosa è la circonferenza?

R. È una linea curva rientrante in sè stessa, che ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno chiamato *centro* (Fig. 14.).

3.ª *D.* Che cosa è un *arco*?

R. È una porzione qualunque di circonferenza, come AD (Fig. 14.).

4.ª *D.* Se una linea retta tocca con le due sue estremità la circonferenza passando per il centro, questa linea come si chiama?

R. Si chiama *diametro,* come AB (Fig. 14.).

5.ª *D.* Come si descrive la circonferenza?

R. Aperto il compasso a piacere, si fissa una delle punte sopra un piano; e si muove l'altra finchè non abbia compiuto un intiero giro.

6.ª *D.* Come si divide la circonferenza?

R. Si divide in 360 parti eguali chiamate *gradi;* e ogni grado in 60 parti eguali chiamate *primi;* e ogni primo in altre 60 parti eguali chiamate *secondi.*

7.ª *D.* Dunque che cosa è un grado?

R. È la trecentosessantesima parte della circonferenza.

8.ª *D.* Quanti gradi contiene una mezza circonferenza?

R. Una mezza circonferenza contiene 180 gradi.

9.ª *D.* Quanti gradi contiene un quarto di circonferenza?

R. Un quarto di circonferenza contiene 90 gradi.

10.ª *D.* Ditemi come si fa a misurare un angolo dato?

R. Aperto il compasso a piacere, si fissa una punta nel vertice dell'angolo, e coll'altra punta si descrive una circonferenza; si divide questa in 360 parti eguali: si guarda quante di queste parti entrano nell'arco che rimane fra i due lati dell'angolo; e questa sarà la misura.

11.ª *D.* Si può in pratica avere più speditamente la misura di un angolo?

R. Si può avere per mezzo del *rapportatore.*

12.ª *D.* Che cosa è il rapportatore?

R. È una mezza circonferenza su cui son segnati i 180 gradi, col suo diametro su cui è segnato il centro (Fig. 15.).

13.ª *D.* Come si misura un angolo col rapportatore?

R. Si pone il centro del rapportatore nel vertice dell'angolo; e il diametro sopra uno dei lati. Il numero dei gradi su cui va a cadere l'altro lato indicherà la misura cercata.

14.ª *D.* Di quanti gradi è l'angolo retto?

R. L'angolo retto è di 90 gradi.

§ V. — **Superficie.**

1.ª *D*. Che cosa è la superficie di un corpo?

R. È la sua lunghezza e larghezza non contando l'altezza.

2.ª *D*. Di quante specie è la superficie?

R. Di tre: *piana, curva* e *spezzata:* piana è quella su cui si può stendere una linea retta in tutte le direzioni: spezzata, quella che si compone di più superficie piane: curva, quella che non è nè piana nè spezzata.

3.ª *D*. Che s'intende per *figura piana?*

R. Figura piana è una superficie piana terminata per ogni parte da linee.

4.ª *D*. Quali sono le figure piane che più occorrono nella geometria pratica?

R. Le figure piane che più occorrono nella geometria pratica sono il *triangolo*, il *quadrilatero*, il *poligono* e il *circolo*.

5.ª *D*. Che cosa è il triangolo.

R. È una figura composta di tre lati e tre angoli, come ABC (Fig. 16.).

6.ª *D*. Quali nomi si danno alle varie specie di triangoli?

R. Il triangolo, se ha tutti e tre i suoi lati eguali, come ACD (Fig. 17.), si chiama triangolo *equilatero:* se ha due soli lati eguali, come DEF (Fig. 18), triangolo *isoscele:* se ha tutti i lati diseguali, come ABC (Fig. 16.), triangolo *scaleno:* se ha un angolo retto, come GHI (Fig. 19.), triangolo *rettangolo*, e il lato HI che sta in faccia all'angolo retto si chiama *ipotenusa*.

7.ª *D*. Quante cose si possono considerare in ogni triangolo?

R. Tre: *base*, *vertice* e *altezza*.

8.ª *D*. Che cosa è la base?

R. Uno qualunque dei suoi lati, per esempio AB (Fig. 20.).

9.ª *D.* Che cosa è il vertice?

R. È l'angolo C che sta in faccia alla base.

10.ª *D.* Che cosa è l'altezza?

R. È la perpendicolare CD tirata dal vertice sulla base (Fig. 20.), o sul suo prolungamento (Fig. 21.).

11.ª *D.* Che cosa è il quadrilatero?

R. È una figura composta di quattro lati e quattro angoli, come ABCD (Fig. 22.).

12.ª *D.* Con quali nomi si distinguono le diverse specie di quadrilateri?

R. Il quadrilatero, se ha tutti i lati eguali e gli angoli retti, come ABCD (Fig. 23.), si chiama *quadrato:* se ha gli angoli retti senza avere i lati eguali, come EFGH (Fig. 24.), *rettangolo:* se ha i lati eguali, senza avere gli angoli retti, come IKLM (Fig. 25.), si chiama *losanga:* se ha i lati opposti paralleli, come NOPQ (Fig. 26.), *parallelogrammo* o *rombo:* se ha due soli lati opposti paralleli, come RSTV (Fig. 27.), *trapezio.*

13.ª *D.* Qual cosa di particolare è da osservarsi circa al parallelogrammo e al trapezio?

R. Nel parallelogrammo (Fig. 26.) un lato qualunque, per esempio NO, dicesi *base;* e la perpendicolare AB inalzata sulla base fino al lato opposto dicesi *altezza:* nel trapezio (Fig. 27.), si dicono *basi* i due lati paralleli RS, TV; e *altezza* la perpendicolare AB tirata fra questi due lati.

14.ª *D.* Che cosa è il poligono?

R. Si dà il nome di poligono a una figura qualunque composta di più lati e più angoli, come ABCDE (Fig. 28.). Il poligono di cinque lati si chiama *pentagono;* quello di sei *esagono;* quello di sette *ettagono;* quello di otto, *ottagono* ec.

15.ª *D.* Che cosa s'intende per *perimetro*, e che per *area* di un poligono o di una figura qualunque?

R. Il perimetro di una figura è il suo contorno, ovvero

la somma di tutti i suoi lati: l'*area* è la superficie racchiusa fra i medesimi lati.

16.ª *D.* Che cosa è una *diagonale?*

R. Diagonale dicesi ogni retta che unisce due angoli opposti di un poligono, come EC o EB (Fig. 28.).

17.ª *D.* Un poligono che ha tutti i suoi lati e i suoi angoli eguali, come si chiama?

R. Poligono *regolare* (Fig. 29.).

18.ª *D.* Che cosa è il *centro* di un poligono regolare?

R. È il punto O (Fig. 29.) dove si taglian due perpendicolari alzate sulla metà di due lati qualunque.

19.ª *D.* Qual è l'*apotema* di un poligono regolare?

R. È la perpendicolare tirata dal centro sopra uno dei suoi lati, come OM (Fig. 29.).

20.ª *D.* Che cosa è il circolo?

R. È lo spazio rinchiuso dalla circonferenza (Fig. 30.).

21.ª *D.* Che cosa è il *raggio* del circolo?

R. Raggio è ogni linea retta che va dal centro alla circonferenza come CD o CE. Tutti i raggi sono eguali fra loro, e sono la metà del diametro.

22.ª *D.* Che cosa è una *corda?*

R. È una retta che tocca con le sue due estremità la circonferenza, senza passare per il centro; come AB (Fig. 30.).

23.ª *D.* Che cosa è il *settore* e il *segmento* di un circolo?

R. *Settore* è la parte del circolo compresa fra un arco, e i due raggi condotti all'estremità del medesimo arco; come DCE (Fig. 30.). *Segmento* è la porzione del circolo compresa fra l'arco e la sua corda, come AOB (Fig. 30.).

24.ª *D.* Se una retta tocca in un sol punto la circonferenza, questa retta come si chiama?

R. Si chiama *tangente.*

25.ª *D.* Quando un poligono si dice *inscritto*, e quando *circoscritto* ad un circolo?

R. Si dice inscritto, quando ha tutti i suoi angoli sulla

circonferenza, come ABCDE (Fig. 31.): circoscritto quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza, come ABCDEF (Fig. 32.).

26.ª *D.* Sapreste indicarmi qual rapporto passa fra la circonferenza e il diametro del circolo?

R. Il diametro sta alla circonferenza presso a poco come 1 a 3,142; il qual numero dai geometri suol denotarsi con π. E però dato il diametro si può conoscere per approssimazione la circonferenza; e viceversa, data la circonferenza si può conoscere il diametro.

27.ª *D.* Come si fa a trovare la circonferenza, quando si conosce il diametro?

R. Si moltiplica il diametro dato per π, ossia per 3,142. Esempio. Un circolo ha centimetri 7 di diametro: sarà dunque la sua circonferenza centimetri $7\times3{,}142=$ centimetri 21,994, cioè metri 0,220 tralasciando gli ultimi due decimali.

28.ª *D.* Come si fa a trovare il diametro, quando è data la circonferenza?

R. Si divide la circonferenza data per π, ossia per 3,142. Esempio. Un circolo ha metri 0,220 di circonferenza: sarà dunque il suo diametro metri $\frac{0{,}220}{3{,}142}=0{,}07$.

§ VI. — Misura della Superficie.

1.ª *D.* Qual è l'unità di misura di superficie?

R. L'unità di misura di superficie è il quadrato costruito sull'unità di misura lineare.

2.ª *D.* Come si misura il quadrato?

R. Presa la lunghezza di un lato si moltiplica per sè stessa, e il prodotto esprime la superficie del quadrato. Abbiasi, per esempio, un quadrato il cui lato sia M.ⁱ 3: sarà la superficie $3\times3=9$ M.ⁱ quadri.

3.ª *D.* Come si misura il rettangolo?

R. Si moltiplica la sua lunghezza per la sua larghezza,

e il prodotto sarà la superficie del rettangolo. Es. Un rettangolo ha M.ⁱ $6\ ^1/_3$ di lungh. e 5 di largh.: la sua superficie sarà $6\ ^1/_3 \times 5 = 31\ ^2/_3$ M.ⁱ quadri.

4.ª *D.* Come si misura il parallelogrammo?

R. Facendo il prodotto della base per l'altezza. Es. Un parallelogrammo ha M.ⁱ 7 di base e 3 di altezza: sarà dunque la sua superficie $7 \times 3 = 21$ M.ⁱ quadri.

5.ª *D.* Come si misura il triangolo?

R. Moltiplicando la base per l'altezza e dividendo per due il prodotto. Es. Un triangolo ha M.ⁱ 4 di base e 3 di altezza; sarà dunque la sua superficie $4 \times 3 : 2 = 12 : 2 = 6$ M.ⁱ quadri.

6.ª *D.* Come si misura il trapezio?

R. Si sommano le due basi e si moltiplica l'altezza per la metà di questa somma. Es. Un trapezio ha M.ⁱ 7 per una delle due basi, e 5 per l'altra; l'altezza è M.ⁱ 4: sarà dunque la sua superficie $\frac{7+5}{2} \times 4 = 6 \times 4 = 24$ M.ⁱ q.

7.ª *D.* Come si ottiene la superficie di un poligono regolare qualunque?

R. La superficie di un poligono regolare qualunque si ha facendo il prodotto del suo perimetro per la metà dell'apotema. Es. Un *pentagono* regolare ha centim. 35 di perimetro, e centim. 4,82 di apotema: sarà dunque la sua superficie $\frac{35 \times 4{,}82}{2} = 35 \times 2{,}41 = 84{,}35$ centim. quadri.

8.ª *D.* Come si misura un quadrilatero irregolare qualunque?

R. Per mezzo di una diagonale si divide in due triangoli; si cerca a parte la superficie dei due triangoli: e sommate insieme queste due superficie, avremo la superficie totale del quadrilatero. — Esempio. La diagonale di un quadrilatero è M.ⁱ 9; le normali dei due triangoli, a cui questa diagonale serve di base, sono una di M.ⁱ 5, l'altra di M.ⁱ 4; si avrà dunque $\frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2}$ per superficie del pri-

mo triangolo, e $\frac{4\times9}{2}=18$ per superficie del secondo; e perciò $\frac{45}{2}+18=22\frac{1}{2}+18=40\frac{1}{2}$ M.[i] quadri sarà la superficie totale del quadrilatero.

9.ª *D.* Come si ottiene la superficie di un poligono irregolare qualunque?

R. Diviso il poligono per mezzo di diagonali in tanti triangoli, si cerca a parte la superficie di questi triangoli: e la somma di tutte le superficie parziali darà la superficie totale del poligono. Es. Diviso un pentagono per mezzo di diagonali in tre triangoli, si trova che il primo ha M.[i] 5 di base e 3 di altezza; il secondo M.[l] 5 di base, e 2,5 d'altezza; il terzo M.[i] 7 di base e 4 d'altezza: si avrà dunque $\frac{5\times3}{2}=7{,}5$ superficie del primo; $\frac{5\times2{,}5}{2}=\frac{12{,}5}{2}=6{,}25$ superficie del secondo; e $\frac{7\times4}{2}=14$, superficie del terzo: e perciò $7{,}5+6{,}25+14=27{,}75$ metri quadri sarà la superficie totale del poligono.

10.ª *D.* Come si determina la superficie del circolo?

R. Facendo il prodotto del suo raggio per sè stesso e per π, ossia 3,142. Es. Abbiasi un circolo il cui raggio sia M.[l] 5. La sua superficie sarà $5\times5\times3{,}142=25\times3{,}142=78{,}55$ M.[i] quadri. — Se invece del raggio si conosce la circonferenza, si potrà sempre per mezzo di questa conoscere anche il raggio (§ III. 26.), e operare nel modo indicato. Ma volendo, si può ottenere direttamente la superficie del circolo, moltiplicando la circonferenza per sè stessa, e dividendo il prodotto per 12,568. Es. Sia la circonferenza di un circolo M.[l] 30: avremo $\frac{30\times30}{12.568}=\frac{900}{12{,}568}=71{,}61$ M.[i] quadri di superficie.

11.ª *D.* Come si determina la superficie di un *settore?*

R. Moltiplicando il suo arco per la metà del raggio del circolo a cui appartiene. Es. Un settore appartiene ad

un circolo il cui raggio è M.[i] $5\frac{1}{2}$, e il suo arco è M.[i] $2\frac{1}{2}$: avrà dunque di superficie $\frac{2\frac{1}{2}\times5\frac{1}{2}}{2}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$=M.[i] q. 6,875.

12.ª *D*. Come si misura la superficie di un *segmento?*

R. Condotti due raggi all'estremità del suo arco e formato un settore, se ne cerca la superficie: e da quella sottratto il triangolo che ha per base la corda del segmento, avremo per resto la superficie del medesimo segmento. Es. Vi è un segmento la cui corda è M.[i] 4, l'arco M.[i] 5 e il raggio M.[i] 7, e la perpendicolare condotta dal centro sulla corda è M.[i] 5,5. Formato il settore, sarà $\frac{5\times7}{2}=17{,}5$ M.[i] quadri la sua superficie: e $\frac{4\times5{,}5}{2}=11$ sarà la superficie del triangolo che ha per base la corda del segmento. Dunque 17,5—11=6,5 M.[i] quadri sarà la superficie del segmento.

§ VII. — **Solidi.**

1.ª *D*. Che s'intende per *solido* o *volume?*

R. *Solido* o *volume* è ciò che riunisce le tre dimensioni di lunghezza, larghezza e altezza.

2.ª *D*. Come si dividono i solidi?

R. I solidi si dividono in *poliedri* e *rotondi:* poliedri diconsi quelli di superficie spezzata; rotondi quelli di superficie curva.

3.ª *D*. Quali sono le *facce* e quali le *costole* di un *solido?*

R. Diconsi facce di un solido le superficie piane da cui è terminato; le costole sono i lati delle medesime facce.

4.ª *D*. Quali solidi occorrono più spesso nella geometria pratica?

R. I solidi che più occorrono nella geometria pratica sono: il *cubo*, il *parallelepipedo*, il *prisma*, la *piramide*, la *sfera*, il *cilindro*, il *cono* e il *cono tronco*.

5.ª *D*. Che cosa è il cubo?

R. Il cubo (Fig. 33.) è un solido terminato da sei quadrati eguali.

6.ª *D*. Che cosa è il parallelepipedo?

R. Il parallelepipedo (Fig. 34) è un solido che ha per facce tanti parallelogrammi o anche tanti rettangoli; nel qual caso però suol chiamarsi *parallelepipedo rettangolo.*

7.ª *D*. Qual è la *base* e quale l'*altezza* del parallelepipedo?

R. La base è una qualunque delle sue facce; e l'altezza è la normale alzata in un punto della base fino all'incontro della faccia opposta.

8.ª *D*. Che cosa è il prisma?

R. Il prisma (Fig. 35, 36, 37.) è un solido che ha per facce tanti parallelogrammi o rettangoli, eccetto due, che possono essere o due triangoli o due poligoni qualunque eguali tra loro, e che si chiamano le *basi* del prisma. L'*altezza* è la perpendicolare tirata fra le due basi.

9.ª *D*. Quando il prisma dicesi *retto* e quando *obliquo*?

R. Il prisma dicesi retto quando per facce ha dei rettangoli (Fig. 35 o 36.): obliquo quando ha per facce dei parallelogrammi (Fig. 37.).

10.ª *D*. Che cosa è la piramide?

R. La piramide (Fig. 38.) è un solido che ha per facce tanti triangoli che partono da un medesimo punto S, e terminano ai differenti lati di un poligono ABCDE.

11ª *D*. Indicatemi il *vertice,* la *base,* e l'*altezza* della piramide?

R. Il vertice è il punto S da cui partono tutte le facce triangolari: la base è il poligono a cui terminano le medesime facce: e l'altezza è la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base.

12.ª *D*. Che si richiede perchè una piramide sia *regolare*?

R. Si richiede che la base sia un poligono regolare; e che l'altezza cada nel centro di questo poligono.

13.ª *D.* Che cosa è l'apotema della piramide regolare?

R. È la normale tirata dal vertice sopra uno dei lati della base.

14.ª *D.* Che cosa è la sfera?

R. La sfera (Fig. 39.) è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno chiamato *centro:* e s'immagina prodotta da un semicircolo che si rivolge intorno al suo diametro AB.

15.ª *D.* Che intendete per *raggio,* e che per *asse* della sfera?

R. Raggio è una retta AC che va dal centro alla superficie della sfera; asse o diametro è una retta AB che unisce due punti opposti della superficie della sfera passando per il centro.

16.ª *D.* Che cosa è il cilindro?

R. Il cilindro (Fig. 40.) è un solido di superficie curva che ha per basi due circoli eguali; e nasce dal far rivolgere il rettangolo ADCE intorno al suo lato CD, che poi si prende per *asse* o *altezza* del cilindro.

17.ª *D.* Che cosa è il cono?

R. Il cono (Fig. 41.) è un solido di superficie curva che ha per base un circolo e va a finire in punta. S'immagina prodotto dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo ABS intorno al lato BS, detto l'*altezza* o l'*asse* del cono; il punto S ne è il vertice; e la linea AS, ipotenusa del triangolo ABC, ne è l'*apotema.*

18.ª *D.* Che cos'è il cono tronco?

R. Il cono tronco (Fig. 42.) è un solido di superficie curva che ha per basi due circoli diseguali. S'immagina prodotto dalla rivoluzione del trapezio ACFD intorno ad uno dei suoi lati non paralleli CF. Questo lato è l'*altezza* del cono tronco; e l'altro lato non parallelo AD, è l'*apotema.*

§ VIII. — Superficie dei Solidi.

1.ª *D.* Che s'intende per superficie dei solidi?

R. Dicesi *superficie laterale* la superficie delle facce del solido; mentre chiamasi *superficie totale* quella delle basi e delle facce.

2.ª *D.* Come si determina la superficie del prisma retto?

R. La superficie del prisma retto si ha facendo il prodotto della sua altezza per il contorno della sua base. Esempio. Un prisma retto ha decimetri 11 di altezza; e il contorno della sua base è decimetri 7. Sarà dunque la sua superficie $7\times11=77$ decimetri quadri.

3.ª *D.* Come si determina la superficie del prisma obliquo?

R. Se il prisma è obliquo, la sua superficie si ottiene moltiplicando la base comune delle sue facce laterali per la somma di tutte le altezze delle medesime facce. — Esempio. Abbiasi un prisma triangolare le cui facce abbiano di base comune M.ⁱ 14,5; e le altezze di queste facce siano M.ⁱ 0,7; 0,75; 0,43. Sarà $0{,}7+0{,}75+0{,}43=1{,}88$ la somma delle altezze; e perciò $14{,}5\times1{,}88=$ M.ⁱ quadri 27,260 sarà la superficie di questo prisma.

4.ª *D.* Come si determina la superficie della piramide regolare?

R. Si determina moltiplicando un lato della base per il numero delle facce e per la metà dell'apotema. Esempio. Un lato di una piramide regolare di quattro facce è M.ⁱ 3, l'apotema M.ⁱ 7. Sarà dunque la superficie di questa piramide $\frac{3\times4\times7}{2}=42$ M.ⁱ quadri.

5.ª *D.* Come si determina la superficie di una piramide irregolare?

R. Se la piramide è irregolare, se ne ottiene la superficie sommando le superficie triangolari da cui è formata.

Esempio. In una piramide quadrangolare i lati della base sono metri 3, metri $2\frac{1}{2}$, metri 2 e metri $1\frac{1}{2}$; e le normali tirate dal vertice su questi lati sono rispettivamente metri 7, metri $5\frac{1}{2}$, m. 4, m. $3\frac{1}{2}$. Avremo dunque $\frac{7\times3}{2}=10\frac{1}{2}$ superficie del 1.° triangolo; $\frac{5\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}}{2}=6\frac{7}{8}$ superficie del 2.°; $\frac{4\times2}{2}=4$ superficie del 3.°; $\frac{3\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}}{2}=2\frac{5}{8}$ superficie del 4.°; onde sommando sarà $10\frac{1}{2}+6\frac{7}{8}+4+2\frac{5}{8}=24$ metri quadri la superficie della piramide.

6.ª *D.* Come si determina la superficie della sfera?

R. La superficie della sfera si ha moltiplicando il suo raggio per sè stesso e per 4π, ossia 12,568. Esempio. Vogliasi la superficie di una sfera il cui raggio sia M.ⁱ 3. Avremo $3\times3\times12,568=113,112$ metri quadri; cioè la sfera avrà di superficie metri quadri 113,112.

7.ª *D.* Come si determina la superficie del cilindro?

R. Si determina moltiplicando la circonferenza di una delle basi per l'asse o altezza. — Esempio. Vogliasi la superficie di un cilindro alto metri 16, e la cui base abbia per raggio metri 3. Prima di tutto se il raggio è 3, il diametro sarà 6, e però avremo la circonferenza della base dicendo $1 : 3,142 :: 6 : x=18,852$. E quindi $18,852\times16=301,632$ metri quadri sarà la superficie del cilindro.

8.ª *D.* Come si misura la superficie del cono?

R. Si misura con moltiplicare la circonferenza della base per la metà dell'apotema. — Esempio. Vogliasi la superficie di un cono la cui base ha M.ⁱ 5 di circonferenza e il cui apotema è M.ⁱ 9. Avremo $\frac{5\times9}{2}=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}$ metri quadri di superficie.

9.ª *D.* Come si determina la superficie del cono tronco?

R. Conoscendo i diametri delle due basi si sommano insieme; e si moltiplica la metà della somma per 3,142 e per l'apotema. Vogliasi la superficie di un cono tronco

le cui basi abbiano per diametro una metri 3 e l'altra metri 5; e il cui apotema sia piedi 7. Sarà 5+3=8 la somma dei diametri, e 4 la sua metà: quindi 4×3,142×7=28 ×3,142=87,976 metri quadri sarà la superficie di questo cono tronco. — Che se invece dei diametri si conoscessero le circonferenze delle basi, allora non si fa altro che moltiplicare la metà della somma di queste circonferenze per l'apotema.

§ IX. — **Misura dei Solidi.**

1.ª *D.* Qual è l'unità di misura di solidità?

R. L'unità di misura di solidità è il cubo costruito sull'unità di misura lineare: e perciò la misura di un solido suol chiamarsi anche la sua cubatura.

2.ª *D.* Se il solido da misurarsi fosse un cubo, come si ottiene la sua solidità?

R. Si ottiene col moltiplicare la lunghezza del suo lato tre volte in sè stessa. — Es. Vogliasi la solidità di un cubo il cui lato è M.ⁱ 0,5. Avremo 0,5×0,5×0,5=0,125: cioè il cubo dato contiene 125 volte il cubo che ha per lato 1 decimetro.

3.ª *D.* Come si ottiene la solidità di un parallelepipedo, e di un prisma?

R. Si ottiene moltiplicando l'altezza per l'area della base. — Es. Si cerchi la solidità di un parallelepipedo alto 7 metri; che ha per base un rettangolo, il cui lato maggiore è metri 4, e il minore metri 2. Avremo 2×4=8, area della base: e 8×7=56 metri cubici sarà la cubatura di questo parallelepipedo. — Altro esempio. Vogliasi la cubatura di un parallelepipedo, la cui altezza sia M.ⁱ 5, e la cui base sia un parallelogrammo di 18 metri q. di superficie. Avremo 18×5=90 M.ⁱ cubici. — Altro esempio. Un prisma ha per base un triangolo, la cui area è M.ⁱ quadri 7,50; e per altezza M.ⁱ 5: qual ne sarà la cubatura? Sarà 7,50×5=Metri cubici 37,50.

4.ª *D.* Come si ottiene la solidità di una piramide?

R. La solidità della piramide si ottiene dividendo per 3 il prodotto dell'area della base per la sua altezza. — Esempio. L'altezza di una piramide è M.ⁱ 7,65, e la base è un quadrilatero la cui area è 6 metri quadri: qual sarà la solidità di questa piramide? Sarà $\frac{6\times7,65}{3}=\frac{45.90}{3}=15,30$ metri cubici. — Altro esempio. Si voglia sapere quanto ricuberà una piramide, la cui altezza è decimetri 14,4 e la base un quadrato di 5 decimetri per lato. Avremo $5\times5=25$ area della base: e $\frac{25\times14,4}{3}=\frac{360}{3}=120$ decimetri cubici sarà la solidità di questa piramide.

5.ª *D.* Come si ottiene la solidità della sfera?

R. Si ottiene dividendo per 3 il prodotto della sua superficie per il suo raggio. — Esempio. Il raggio di una sfera è metri 2,5; e perciò la sua superficie è metri quadri 78,55 (§ VIII, 6.), qual ne sarà la cubatura? Sarà $\frac{2,5\times78,55}{3}=65,458$ metri cubici.

6.ª *D.* Come si ottiene la solidità del cilindro?

R. Si ottiene moltiplicando l'altezza per la superficie di una delle basi. — Esempio. La base di un cilindro ha decimetri 5 di raggio, e l'altezza è decimetri 17. Sarà dunque $5\times5\times3,142=25\times3,142=78,55$ decimetri quadri la superficie della base (§ VI, 10.); e $78,55\times17=1335,35$ decimetri cubici la solidità del cilindro.

7.ª *D.* Come si ottiene la solidità del cono?

R. Si ottiene moltiplicando l'area della sua base per un terzo dell'altezza. — Esempio. La base di un cono è M.ⁱ quadri $4\frac{1}{3}$; la sua altezza M.ⁱ 7: quale ne sarà la cubatura? Sarà $4\frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{13\times7}{9}=\frac{91}{9}=10\frac{1}{9}$ metri c. — Altro esempio. Il raggio della base di un cono è centimetri $3\frac{1}{2}$, onde $3\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}\times\pi=3\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}\times3,142=12,25\times3,142=38,489$ centimetri q. ne sarà la superficie (§ VI, 10.); l'altezza del me-

desimo cono è centimetri $9\frac{1}{6}$; qual ne sarà la cubatura? Sarà

$\frac{38,489\times9\frac{1}{6}}{3}=\frac{38,489\times55}{18}=\frac{2116,895}{18}=117,605$ centimetri cubici.

8.ª *D.* Come si misura la solidità di un cono tronco?

R. Per misurare la solidità del cono tronco si deve: 1.º moltiplicare il raggio di una delle basi per il raggio dell'altra: 2.º sommarne il prodotto coi quadrati dell'uno e dell'altro raggio: 3.º moltiplicarne la somma per un terzo dell'altezza e per π, ossia 3,142. — Esempio. Si cerchi la solidità di un cono tronco la cui altezza sia M.ⁱ 2, e le cui basi abbiano per raggio una metri 2 e l'altra metri $1\frac{1}{2}$. Avremo:

Per prodotto dei due raggi	3
Per quadrato del 1.º raggio	4
Per quadrato del 2.º	$2\,^1/_4$
Somma	$9\,^1/_4$
E per il terzo dell'altezza.	$^2/_3$

onde $9\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times3,142=\frac{37}{4}\times\frac{2}{3}\times3,142=6,16667\times3,142$ $=19,377$ m. cubici sarà la solidità di questo cono tronco.

9.ª *D.* Si potrebbe in qualche caso avere più speditamente la cubatura del cono tronco?

R. Se l'altezza del cono tronco non oltrepassa le tre o quattro *unità di misura;* e i diametri delle basi non differiscono fra loro più di una o due delle stesse unità; se ne ottiene la cubatura senza notabile errore, moltiplicando l'altezza per il quadrato della metà della somma dei due raggi e per π. Si riprenda l'esempio che sopra; cioè un cono tronco alto M.ⁱ 2, e le cui basi abbiano il raggio una M.ⁱ $1\frac{1}{2}$ e l'altra M.ⁱ 2. La metà della somma dei due raggi sarà 1,75; e 3,0625 sarà il suo quadrato: e quindi $2\times3,0625\times3,142=$ 19,245 metri cubici sarà la cubatura cercata, differente di soli $\frac{132}{1000}$ da quella ottenuta di sopra.

10.ª *D.* A quale delle figure fin qui contemplate potrebbe ridursi la botte, volendone la cubatura o capacità?

R. La botte (Fig. 43.) può considerarsi come formata da due coni tronchi che hanno per base comune quello che dicesi cocchiume della botte. Questi coni tronchi talvolta sono eguali, quando cioè i fondi della botte sono eguali; e talvolta diseguali. Se sono eguali si ottiene la cubatura della botte raddoppiando la cubatura di uno dei due coni tronchi; se sono diseguali si cerca a parte la loro cubatura, e quindi sommando si otterrà la cubatura totale della botte.

11.ª *D.* Datemi un esempio del primo caso, quando cioè i fondi della botte sono eguali?

R. Si abbia una botte a fondi eguali aventi ciascuno per raggio metri 1,25; il raggio del cocchiume sia metri 1,75 e metri 4 sia la distanza dei fondi. In questo caso cercheremo la cubatura di un cono tronco la cui altezza sia metri 2, metà della distanza dei fondi; e le cui basi abbiano per raggio una metri 1,25 e l'altra metri 1,75: il doppio di questa cubatura sarà quella della botte. Avremo dunque secondo la regola esposta al N.º 9 di questo paragrafo:

Metà della somma dei raggi.	1,50
Suo quadrato.	2,25
Suo prodotto per l'altezza.	4,50
Prodotto per π, cioè per 3,142.	14,14

cioè metri cubi 14,14 sarà la cubatura del cono tronco, che raddoppiata diverrà metri cubi 28,28; cubatura o capacità della botte proposta.

12.ª *D.* Datemi un esempio del secondo caso, quando cioè i fondi delle botti non sono eguali?

R. Si abbia una botte, i cui fondi abbiano per raggio uno metri 1, e l'altro metri 1,40; e siano distanti dal cocchiume respettivamente uno m. 2,625 e l'altro m. 2,375; il raggio del cocchiume sia metri 1,50. In questo caso

cercheremo la cubatura di due coni tronchi, il primo dei quali abbia metri 2,625 di altezza; e per raggi delle basi metri 1, e metri 1,50: e il secondo metri 2,375 di altezza e per raggi delle basi metri 1,40 e metri 1,50. Avremo per il primo:

Metà della somma dei raggi. 1,25
Suo quadrato. 1,5625
Suo prodotto per l'altezza. 4,1016
Suo prodotto per π. 12,8871

Dunque m. c. 12,8871 sarà la cubatura del primo cono tronco. Per il secondo avremo:

Metà della somma dei raggi. 1,45
Suo quadrato. 2,1025
Suo prodotto per l'altezza. 4,9934
Prodotto per π. 15,6894

E metri cubici 15,6894 sarà la cubatura del secondo cono tronco. Sarà dunque la cubatura totale della botte metri cubici 12,8871+15,6894=28,5765.

§ X. — Alcune costruzioni geometriche che più sogliono occorrere nella pratica.

1.ª *D.* Come si divide una retta data in due parti eguali?

R. (Fig. 44.) Fatto centro nell'estremità A e B della retta data con un'apertura di compasso maggiore della metà della medesima retta, si descrivano al di sopra e al di sotto di essa degli archi di circonferenza che si taglino nei punti C e D: e la retta che unirà questi due punti dividerà in mezzo la retta data.

2.ª *D.* Come s'inalza una perpendicolare in un punto dato sopra una retta?

R. (Fig. 45.) Col centro nei punti A e B presi a egual distanza dal punto dato C, e con un raggio maggiore di AC

si descrivano due archi che si taglieranno nel punto D: e la retta che unisce il punto D col punto C sarà la perpendicolare richiesta.

3.ª *D.* Come si abbassa una perpendicolare sopra una retta da un punto dato fuori di essa?

R. (Fig. 46.) Col centro nel punto dato A e con una sufficiente apertura di compasso, si descrive un arco che tagli la retta data nei punti B e C; quindi col centro in questi due punti e colla medesima apertura di compasso o con altra qualunque, si segnano due archi che si tagliano nel punto D: e la retta che unisce il punto A col punto D sarà la perpendicolare richiesta.

4.ª *D.* Come si alza una perpendicolare all'estremità di una retta che non si possa prolungare?

R. (Fig. 47.) Preso come centro un punto qualunque C fuori della retta data AB, si descrive un arco che passi per A e tagli la retta in un punto D: per questo punto e per C si tira una retta sino all'incontro dell'arco in E: e la retta che passa per i punti A ed E sarà la perpendicolare richiesta.

5.ª *D.* Come si tira una parallela a una retta da un punto dato?

R. (Fig. 48.) Si fa centro nel punto dato A e con una sufficiente apertura di compasso si descrive un arco che tagli la retta data B C nel punto *e*: da questo come centro e colla medesima apertura di compasso si descrive l'arco A*f*: si riporta la distanza A*f* sull'arco *e*D: e la retta che passa per i punti A e D sarà la parallela richiesta.

6.ª *D.* Come si può trovare il centro di un circolo o di un arco dato?

R. (Fig. 49.) Presi sulla circonferenza tre punti a piacere A, B, C, si tirano le corde AB e BC: si alza una perpendicolare sulla metà di AB ed una sulla metà di BC: e il punto O dove s'incontrano queste perpendicolari è il centro cercato.

7.ª *D.* Come si descrive una circonferenza che passi per tre punti dati non in linea retta?

R. (Fig. 49.) Essendo A, B e C i tre punti dati, si tirano le rette AB e BC: si alza una perpendicolare sulla metà di AB ed una sulla metà di BC: e il punto O dove s'incontrano queste perpendicolari è il centro della circonferenza che passa per A, B e C.

8.ª *D.* Come si forma in un punto di una retta un angolo eguale a un angolo dato?

R. (Fig. 50.) Sia la retta DE, e si voglia formare nel punto D un angolo eguale all'angolo dato A. Col centro in A e con un raggio a piacere si descrive l'arco BC: col medesimo raggio e col centro in D si descrive l'arco EF, su cui si riporta la distanza BC: e la retta condotta per D ed F formerà con DE l'angolo richiesto.

9.ª *D.* Come si divide in due parti eguali un arco o un angolo dato?

R. (Fig. 51.) Se vogliasi dividere in mezzo l'arco BC, di cui si conosca il centro A; dai punti B e C come centro e con una sufficiente apertura di compasso si segnino due archi che si taglino nel punto D: quindi per il centro A e per il punto D si tiri una retta che taglierà in due parti eguali l'arco BC. — Se poi si volesse dividere in due parti eguali l'angolo A; col centro in A e con un raggio a piacere si descrive l'arco BC: facendo centro in B e C si segnano due archi che si taglino in D: e unito D con A resterà diviso in mezzo l'angolo dato.

10.ª *D.* Come si divide una retta in un numero qualunque di parti tutte eguali fra loro?

R. (Fig. 52.) Sia AB la retta data. Per una delle sue estremità si tira la retta indefinita BG. Su questa, a partire dal punto B, si prende una lunghezza a piacere BC e si ripete tante volte, quante sono le parti in cui vogliamo divider la retta; si unisce l'ultimo punto di divisione G coll'estremità A, e tirando dagli altri punti di divisione tante parallele ad AG resterà divisa la retta nel modo richiesto.

11.ª *D.* Come si costruisce un quadrato sopra una retta data?

R. (Fig. 53.) Essendo AB la retta data, con un raggio eguale a questa e col centro nei punti A e B si descrivano due archi che si taglieranno nel punto G. Si prenda GF eguale a GA, e si tiri BF che taglierà AG in due parti eguali nel punto E. Si prenda GD eguale a GE, come pure GC: e le rette AD, DC e CB formeranno con AB il quadrato richiesto.

12.ª *D.* Come si forma sopra una retta data un rettangolo di egual superficie a un altro rettangolo dato?

R. (Fig. 54.) Sia DE la retta data, e ABCD il rettangolo. Si tirino due rette che s'incontrino in F formando tra loro un angolo qualunque. Sopra una di queste a partire dal punto F, si prenda FG eguale a DE; ed FH eguale ad AB, base del rettangolo dato: sull'altra si prenda FI eguale ad AD, altezza del medesimo rettangolo. Si unisca G con I; e per il punto H si tiri una parallela a GI. FL sarà l'altezza del rettangolo richiesto.

13.ª *D.* Come si forma un quadrato della stessa superficie di un rettangolo dato?

R. (Fig. 55.) Si prolunga AB, base del dato rettangolo, di una lunghezza BE eguale alla sua altezza; e sopra AE come diametro si descrive una mezza circonferenza. Quindi prolungata BC fin all'incontro della circonferenza in F, sarà BF il lato del quadrato richiesto.

14.ª *D.* Come si conduce la tangente alla circonferenza per un punto dato sulla circonferenza medesima?

R. (Fig. 56.) Essendo A il punto dato, si tira il raggio CA e si prolunga. Quindi presi due punti ad egual distanza dal punto A, e fatto centro in questi si segnino due archi che si taglino in D. La retta che passa per il punto D e per il punto A sarà la tangente cercata.

15.ª *D.* Come si conduce la tangente alla circonferenza per un punto dato fuori di questa?

R. (Fig. 57.) Sia A il punto, ed O il centro della cir-

conferenza: si tiri AO e su questa come diametro si descriva una nuova circonferenza che taglierà quella data nei punti B e D. Le rette tirate per il punto A e per i punti B e D saranno ambedue tangenti alla circonferenza data.

16.ª *D.* Come s'inscrive il quadrato nella circonferenza; e come l'ottagono regolare?

R. (Fig. 58.) Si tirano due diametri AC e BD ad angolo retto: si uniscono l'estremità di questi colle corde AB, BC, CD e DA e si ha il quadrato. Divisi poi in mezzo gli archi AB, BC, CD e DA, e tirate le corde corrispondenti a ciascuna metà, si ha l'ottagono regolare.

17.ª *D.* Come s'inscrive il triangolo equilatero e l'esagono regolare nella circonferenza?

R. (Fig. 59.) Si fa centro in un punto qualunque A della circonferenza, e col raggio di questa si descrive l'arco BCD. La corda BD riportata tre volte sulla circonferenza, darà il triangolo equilatero. L'esagono poi si ottiene prendendo per lato il raggio stesso della circonferenza che potrà riportarsi esattamente sei volte su di essa.

18.ª *D.* Come si inscrive il pentagono e il decagono regolare nella circonferenza?

R. (Fig. 60.) Presi due diametri AB, DE ad angolo retto; si fa centro nel punto F, metà del raggio BC, e col raggio EF si descrive l'arco EG. Quindi col centro in E e col raggio EG si descrive l'arco GH. E la corda EH riportata cinque volte sulla circonferenza darà il pentagono regolare inscritto. Il decagono regolare si otterrà col dividere in mezzo i cinque archi corrispondenti ai lati del pentagono.

§ XI. — Quesiti da risolversi per esercizio.

1.º Un lato di un muro di superficie quadrata è metri 7 $\frac{1}{2}$. Volendo parare questo muro con una stoffa, quanti metri quadri se ne richiederanno? — Risp. Metri quadri 56,25 (§ VI, 2.).

2.° Vi è un'asse d'ebano di figura rettangolare; uno dei suoi lati è centimetri $12\frac{1}{2}$, e l'altro centimetri $7\frac{1}{5}$. Si vuol fare un intarsio a scacchi di un centimetro l'uno: quanti se ne potranno ricavare dall'asse suddetta? — Risp. 90 scacchi (§ VI, 3.).

3.° Si vuol fare l'impiantito di una sala lunga metri 20 e larga metri 16, con ambrogette di marmo quadrate di 16 decimetri quadri l'una: quante ve ne vorranno? — Risp. Ambrogette 2000.

4.° Con quanti mattoni lunghi decimetri 4 e larghi decimetri 2, si farebbe l'impiantito della sala suddetta? — Risp. Con mattoni 4000.

5.° Un cortile di figura romboidale ha il suo maggior lato di metri 17,50 e la normale è metri 7,60: qual ne sarà la superficie? — Risp. Metri quadri 133 (§ VI, 4.).

6.° Un lato di un campo di figura triangolare è metri 16,25, e la normale tirata dall'angolo opposto su questo lato è metri 12,20: qual sarà la superficie di questo campo? — Risp. Metri quadri 99,125 (§ VI, 5.).

7.° Vi è un giardino in forma di trapezio: uno dei lati paralleli è metri 32,60; l'altro metri 26,50; la loro distanza è metri 15,84; quanti metri quadri sarà l'area del giardino? — Risp. Metri q. 468,072 (§ VI, 6.).

8.° Un prato di figura circolare è attraversato da un viale lungo metri 125, che lo divide in due parti eguali: si cerca qual sarà la circonferenza, e quale la superficie di questo prato? — Risp. La circonferenza sarà metri 392,75 (§ V, 26.), e la superficie metri quadri 12273,4375 (§ VI, 10.).

9.° Con quanti metri di pezza alta metri 1,80 si fascerebbe una colonna di figura ottagona regolare alta m. 18 e la cui base ha i lati di m. 1,25 l'uno. — Risp. Con metri 100 (§ VIII, 2.).

10.° Una tettoia di lastra di zinco ha la forma di piramide quadrangolare. Le mura della fabbrica che essa ricuopre sono lunghe metri 15 per ogni lato, e la normale

tirata dal più alto punto della fabbrica fino all'estremità del tetto è metri 9. Si domanda quanta lastra di zinco deve essere occorsa per la detta tettoia. — Risp. Ne sono occorsi metri quadri 270 (§ VIII, 4.).

11.° Si domanda quanti metri quadri di latta occorreranno a formare una palla il cui asse sia metri 3,50. — Risp Metri quadri 38,4895 (§ VIII, 6.).

12.° Con quanti metri quadri di lamiera di ferro si formerebbe un tubo cilindrico lungo m. 35, e che avesse 4 decimetri di diametro? — Risp. Con metri quadri 43,988 (§ VIII, 7.).

13.° La pergamena di un campanile ha di circonferenza metri 11,20; e l'apotema è metri 14,333: qual sarà la sua superficie? — Risposta. Sarà metri quadri 80,2667 (§ VI, 8.).

14.° Il diametro del fondo di un tino è metri 3,50: il diametro della bocca è metri 3: l'apotema è metri 4,20: qual sarà la superficie del tino? — Risposta. Metri quadri 42,8883 (§ VIII, 9.).

15.° Il piedistallo d'una colonna è un cubo, il cui lato è metri $4\frac{1}{2}$; si domanda quanti piedi cubici sarà? — Risposta. Metri cubici $91\frac{1}{8}$ (§ IX, 2.).

16.° Quanti chilolitri d'acqua conterrà una cisterna di figura parallelepipeda il cui fondo è un quadrato di metri 3 per lato; e la sua profondità metri 7,50? — Risposta. Siccome ogni chilolitro equivale a un metro cubico, conterrà la suddetta cisterna chilolitri 67,5 di acqua (§ IX, 3.).

17.° Si vuol sapere quanti chilolitri di grano saranno in un cassone lungo m. 5, largo m. 2,50, e alto m. 2,25. — Risp. Ve ne saranno chilolitri 28,125 (§ IX, 3.).

18.° Con quanti mattoni lunghi metri 0,50; larghi 0,25; e alti 0,10 si costruirebbe un muro lungo metri 90, alto metri 8 e largo metri 1,50? — Risposta. Con mattoni 86400 (§ IX, 3.).

19.° Con quanti masselli lunghi metri 0,60, alti m. 0,25 e larghi 0,40 si costruirebbe il muro suddetto? — Risp. Con masselli 18000 (§ IX, 3.).

20.° Si vuole scassare un pezzo di terra di figura triangolare che ha una superficie di 8550 metri quadri: e lo scasso deve esser profondo metri 1,5. Pagandolo a ragione di L. 0,10 per ogni metro cubico, quánto costerà in tutto? — Risp. L. 1282,50 (§ IX, 3.).

21.° Si vuol sapere quanto peserà un'aguglia di marmo la cui altezza è metri 9 e la cui base è un quadrato di metri 2,60 per lato. — Risp. Valutando il peso di un metro cubico di marmo a chilogrammi 2730, sarà chilogr. 55364,40 = Tonnellate 55,3644 il peso dell'aguglia (§ IX, 4.).

22.° Un globo di bronzo che ha di diametro metri 2 si vuole empire di acqua: quanta ne conterrà? — Risp. Chilolitri 4,189 (§ IX, 5.).

23.° Vi è un pozzo cilindrico la cui circonferenza è metri 5,50; e la profondità dell'acqua è metri 6,40; quanti chilolitri d'acqua conterrà? — Risp. Chilolitri 15,4035 (§ IX, 6.).

24.° Il cavo di un recipiente è di figura perfettamente conica: è fondo metri 0,50 e la bocca ha metri 0,75 di raggio; qual sarà la capacità di questo recipiente? — Risposta. Conoscendosi che un recipiente di un decimetro cubo contiene un litro, il suddetto cavo avrà la capacità di litri 294,5625 (§ IX, 7.).

25.° Si domanda quanto vino uscirà da un tino pieno di uve pigiate, supposto che un terzo del contenuto siano vinacce; l'altezza del tino è metri 2,75; il diametro della bocca metri 3,50; il diametro del fondo metri 4,25. — Risp. Ne usciranno ettolitri 216,91 (§ IX, 8.).

TAVOLE DEI LOGARITMI.

N	Log.	N	Log.	N	Log.
1	000000	34	531479	67	826075
2	301030	35	544068	68	832509
3	477121	36	556303	69	838849
4	602060	37	568202	70	845098
5	698970	38	579784	71	851258
6	778151	39	591065	72	857332
7	845098	40	602060	73	863323
8	903090	41	612784	74	869232
9	954243	42	623249	75	875061
10	000000	43	633468	76	880814
11	041393	44	643453	77	886491
12	079181	45	653213	78	892095
13	113943	46	662758	79	897627
14	146128	47	672098	80	903090
15	176091	48	681241	81	908485
16	204120	49	690196	82	913814
17	230449	50	698970	83	919078
18	255273	51	707570	84	924279
19	278754	52	716003	85	929419
20	301030	53	724276	86	934498
21	322219	54	732394	87	939519
22	342423	55	740363	88	944483
23	361728	56	748188	89	949390
24	380211	57	755875	90	954243
25	397940	58	763428	91	959041
26	414973	59	770852	92	963788
27	431364	60	778151	93	968483
28	447158	61	785330	94	973128
29	462398	62	792392	95	977724
30	477121	63	799341	96	982271
31	491362	64	806180	97	986772
32	505150	65	812913	98	991226
33	518514	66	819544	99	995635

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
100	00.0000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891	
101	00 4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	
102	00 8600	9026	9451	9876							
	01.				0300	0724	1147	1570	1993	2415	
103	01.2837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	
104	01.7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947			
	02.								0361	0775	
105	02.1189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896	
106	02.5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	
107	02.9384	9789									
	03.		0195	0600	1004	1409	1812	2216	2619	3021	
108	03.3424	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	
109	03.7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811				
	04.							0207	0602	0998	
110	04.1393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932	
111	04.5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	
112	04.9218	9606	9993								
	05.			0380	0766	1153	1538	1924	2309	2694	
113	05.3078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5761	6142	6524	
114	05.6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942		
	06.									0320	
115	06 0698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083	
116	06.4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	
117	06.8186	8557	8928	9298	9668						
	07.					0038	0407	0776	1145	1514	
118	07.1882	2250	2618	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182	
119	07.5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	
120	07.9181	9543	9904								
	08.			0266	0626	0987	1347	1707	2067	2426	
121	08.2785	3144	3503	3861	4219	4576	4933	5291	5647	6004	
122	08.6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	
123	08.9905										
	09.	0258	0611	0963	1315	1667	2018	2370	2721	3071	
124	09.3422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	
125	09 6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681		
	10.									0026	
126	10.0371	0715	1059	1403	1747	2090	2434	2777	3119	3462	343
127	10.3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	341
128	10.7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916		338
	11.									0253	
129	11.0590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609	335
130	11.3943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6640	333
131	11.7271	7602	7934	8265	8565	8926	9256	9586	9915		331
	12.									0245	
132	12 0574	0903	1232	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525	328
133	12.3852	4178	4504	4830	5156	5481	5807	6131	6456	6781	326
134	12.7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690		323
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
	13.									0012	
135	13.0334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219	320
136	13.3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5768	6086	6403	318
137	13.6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	316
138	13.9879										314
	14.	0194	0508	0822	1136	1450	1763	2076	2390	2702	
139	14.3015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	14.6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911	309
141	14.9219	9527	9835								307
	15.			0142	0449	0756	1063	1370	1676	1982	306
142	15.2288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
143	15.5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
144	15.8362	8664	8965	9266	9567	9868					301
	16.						0168	0469	0769	1068	300
145	16.1368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055	299
146	16.4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
147	16.7317	7613	7908	8203	8498	8792	9086	9380	9674	9968	294
148	17.0262	0555	0848	1141	1434	1726	2019	2311	2603	2895	293
149	17.3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	290
150	17.6091	6381	6670	6959	7248	7536	7825	8113	8401	8689	288
151	17.8977	9264	9552	9839							287
	18.				0126	0413	0699	0986	1272	1558	286
152	18.1844	2129	2415	2700	2985	3270	3555	3839	4123	4408	285
153	18.4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
154	18.7521	7803	8084	8366	8647	8928	9210	9490	9771		281
	19·									0051	
155	19.0332	0612	0892	1171	1451	1730	2010	2289	2568	2846	280
156	19.3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
157	19.5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
158	19.8657	8932	9207	9481	9755						275
	20.					0029	0303	0577	0850	1124	274
159	20.1397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848	272
160	20.4120	4391	4662	4934	5204	5475	5746	6016	6286	6556	270
161	20.6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
162	20.9515	9783									268
	21.		0051	0319	0586	0853	1121	1388	1654	1921	267
163	21.2188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
164	21.4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	21.7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	263
166	22.0108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456	261
167	22.2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
168	22.5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
169	22.7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938		256
	23.									0193	
170	23.0449	0704	0960	1215	1470	1724	1979	2233	2488	2742	255
171	23.2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
172	23.5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
173	23.8046	8292	8548	8799	9049	9299	9550	9800			251
	24.								0050	0300	250
174	24.0549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790	249
175	24.3038	3286	3534	3782	4030	4277	4524	4772	5019	5266	248
176	24.5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
177	24.7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932		245
	25.									0176	
178	25.0420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2368	2610	244
179	25.2833	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	25.5273	5514	5755	5996	6237	6477	6718	6958	7198	7439	241
181	25.7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
182	26.0071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1739	1976	2214	238
183	26.2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4345	4582	237
184	26.4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	26.7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
186	26.9513	9746	9980								
	27.			0213	0446	0679	0912	1144	1377	1609	233
187	27.1842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
188	27.4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
189	27.6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	27.8754	8982	9211	9439	9667	9895					228
	28.						0123	0351	0578	0806	
191	28.1033	1261	1488	1715	1942	2169	2396	2622	2849	3075	227
192	28.3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
193	28.5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
194	28.7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	224
195	29.0035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1813	2034	222
196	29 2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
197	29.4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
198	29.6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
199	29.8853	9071	9289	9507	9725	9943					218
	30.						0161	0378	0595	0813	
200	30.1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980	217
201	30 3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
202	30.5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
203	30.7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
204	30.9630	9843									
	31.		0056	0268	0481	0693	0906	1118	1330	1542	212
205	31.1754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	211
206	31.3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
207	31.5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
208	31.8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
209	32.0146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012	207
210	32 2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077	206
211	32.4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
212	32.6336	6541	6745	6950	7154	7359	7563	7767	7972	8176	204
213	32.8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805			203
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
•	33.								0008	0211	
214	33.0414	0617	0820	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236	202
215	33.2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	
216	33.4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
217	33.6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
218	33.8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849			
	34.								0047	0246	199
219	34.0444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225	198
220	34.2423	2620	2817	3014	3212	3409	3605	3802	3999	4196	197
221	34 4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
222	34.6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
223	34.8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860		194
	35.									0054	
224	35.0248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989	193
225	35.2183	2375	2568	2761	2954	3146	3339	3532	3724	3916	192
226	35.4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	191
227	35 6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	
228	35.7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
229	35.9835										
	36.	0025	0215	0404	0593	0783	0972	1161	1350	1539	189
230	36.1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424	188
231	36.3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	
232	36.5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
233	36.7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
234	36.9216	9401	9587	9772	9958						
	37.					0143	0328	0513	0698	0883	185
235	37.1068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728	184
236	37.2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	
237	37.4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6211	6394	183
238	37.6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
239	37.8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849		181
	38.									0030	
240	38.0211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837	
241	38.2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
242	38.3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5427	179
243	38.5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
244	38.7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	
245	38 9166	9343	9520	9698	9875						177
	39.					0051	0228	0405	0582	0759	
246	39.0935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521	176
247	39.2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	175
248	39.4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	
249	39.6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
250	39.7940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9327	9501	
251	39.9674	9847									173
	40.		0020	0192	0365	0538	0711	0883	1056	1228	
252	40.1401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
253	40.3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
254	40.4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	
255	40.6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
256	40.8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
257	40.9933										
	41.	0102	0271	0440	0609	0777	0946	1114	1283	1451	
258	41.1620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
259	41.3300	3467	3635	3802	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	41.4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474	
261	41.6640	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
262	41.8301	8467	8633	8798	8964	9129	9293	9460	9625	9791	
263	41 9956										
	42.	0121	0286	0451	0616	0781	0945	1110	1275	1439	165
264	42 1604	1768	1933	2097	2262	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	42.3246	3410	3573	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	
266	42.4882	5045	5208	5374	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
267	42 6311	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
268	42.8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	
269	42.9752	9914									
	43.		0075	0236	0398	0559	0720	0881	1042	1203	161
270	43.1364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809	
271	43.2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4250	4409	160
272	43.4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
273	43.6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	
274	43.7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	43.9333	9491	9648	9806	9964						
	44.					0122	0279	0437	0594	0752	
276	44 0909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323	157
277	44.2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3888	156
278	44 4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	
279	44.5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155
280	44.7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552	
281	44 8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941		154
	45.									0095	
282	45 0249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633	
283	45.1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	153
284	45 3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	
285	45.4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	152
286	45.6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	
287	45.7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
288	45.9392	9543	9694	9845	9995						
	46.					0146	0296	0447	0597	0748	
289	46.0898	1048	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2098	2248	150
290	46.2398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744	
291	46.3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	149
292	46.5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	148
293	46 6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
294	46.8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
295	46.9822	9969									147
	47.		0116	0263	0410	0557	0704	0851	0998	1145	
296	47.1292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	
297	47.2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
298	47.4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	
299	47.5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
300	47.7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422	
301	47.8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
302	48.0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299	
303	48.1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
304	48.2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	
305	48.4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
306	48.5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	
307	48.7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
308	48.8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	
309	48.9958										140
	49.	0099	0240	0380	0520	0661	0801	0941	1081	1222	
310	49.1362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621	
311	49.2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
212	49.4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	
313	49.5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	
314	49.6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138
315	49.8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	
316	49.9687	9824	9962								137
	50.			0099	0236	0374	0511	0648	0785	0922	
317	50.1059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	
318	50.2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3654	136
319	50.3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	
320	50.5150	5286	5421	5557	5692	5828	5964	6099	6234	6370	
321	50.6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
322	50.7856	7991	8125	8260	8395	8530	8664	8799	8933	9068	
323	50.9202	9337	9471	9606	9740	9874					
	51.						0009	0143	0277	0411	134
324	51.0545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750	
325	51.1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
326	51.3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	
327	51.4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	132
328	51.5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	
329	51.7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	
330	51.8514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697	131
331	51.9828	9959									
	52.		0090	0221	0353	0484	0615	0745	0876	1007	
332	52.1138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	
333	52.2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
334	52.3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	
335	52.5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
336	52.6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	129
337	52.7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8331	8660	8788	
338	52.8917	9045	8174	9302	9430	9559	9687	9815	9943		128
	53.									0072	
339	53.0200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351	
340	53.1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627	127
341	53.2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	
342	53.4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	
343	53.5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6179	6306	6432	126
344	53.6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	
345	53.7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	
346	53.9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954			125
	54.								0079	0204	
347	54.0329	0455	0580	0705	0830	0955	1080	1205	1330	1454	
348	54.1579	1704	1829	1954	2078	2203	2327	2452	2576	2701	
349	54.2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124
350	54.4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183	
351	54.5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	
352	54.6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
353	54.7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	
354	54.9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984		
	55.									0106	
355	55.0228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328	122
356	55.1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	
357	55.2660	2790	2912	3033	3155	3276	3398	3518	3640	3762	
358	55.3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
359	55.5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	
360	55.6303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387	120
361	55.7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	
362	55.8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	
363	55,9907										
	56.	0026	0146	0265	0385	0504	0624	0743	0863	0982	119
364	56.1101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	
365	56.2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	
366	56.3481	3600	3718	3837	3956	4074	4192	4311	4429	4548	
367	56.4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
368	56.5848	5966	6084	6202	6320	6437	6558	6673	6791	6909	
369	56.7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	
370	56.8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257	117
371	56.9374	9491	9608	9725	9842	9959					
	57.						0076	0193	0309	0426	
372	57.0543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592	
373	57.1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2756	116
374	57.2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	
375	57.4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	
376	57.5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
377	57.6341	6456	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
378	57.7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	115
379	57.8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
380	57.9784	9898									
	58.		0012	0126	0241	0355	0469	0583	0697	0811	
381	58.0925	1039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	
382	58.2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	113
383	58.3199	3312	3425	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	
384	58.4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	
885	58.5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	
386	58.6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
387	57.7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	
388	58.8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	
389	58.9950										
	59.	0061	0173	0284	0396	0507	0619	0730	0842	0953	111
390	59.1065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066	
391	59.2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	
392	59.3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	
393	59.4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	110
394	59.5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	
395	59.6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	
396	59.7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	
397	59.8790	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
398	59.9883	9992									
	60.		0101	0210	0319	0428	0537	0646	0755	0864	
399	60 0973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	
400	60.2060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036	108
401	60.3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	
402	60.4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	
403	60.5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	
404	60.6381	6489	6596	6704	6811	6918	7026	7133	7241	7348	107
405	60.7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	
406	60.8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	
407	60.9594	9701	9808	9914							
	61.				0021	0128	0234	0341	0447	0554	
408	61.0660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
409	61.1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	
410	61.2784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736	
411	61.3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	
412	61.4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
413	61.5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6791	6895	
414	91.7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	
415	61.8048	8153	8257	3362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	
416	61.9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928		
	62.									0032	104
417	62.0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072	
418	62.1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	
419	62.2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
420	62.3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179	103
421	62.4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	
422	62.5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	
423	62.6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	
424	62.7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	
425	62.8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
426	62.9410	9512	9613	9715	9817	9919					
	63.						0021	0123	0224	0326	
427	63 0428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	1342	
428	63.1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
429	63 2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	
430	63.3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376	
431	63.4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	
432	63.5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	
433	63.6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	100
434	63.7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8289	8389	
435	63.8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	
436	63.9486	9586	9686	9785	9885	9984					
	64.						0084	0183	0283	0382	
437	64.0481	0581	0680	0780	0879	0978	1077	1176	1276	1375	99
438	64.1474	1573	1672	1772	1871	1970	2069	2168	2267	2366	
439	64.2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	
440	64.3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340	
441	64.4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
442	64.5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6109	6208	6306	
443	64.6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	
444	64.7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	
445	64.8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	97
446	64.9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919				
	65.							0016	0113	0210	
447	65.0308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181	
448	65.1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	
449	65.2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	
450	65.3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	96
451	65.4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	
452	65.5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	
453	65.6098	6192	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	
454	65.7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	
455	65.8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	
456	65.8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	95
457	65.9916										
	66.	0011	0106	0201	0296	0391	0486	0581	0676	0771	
458	66.0865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718	
459	66.1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	
460	66.2758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607	94
461	66.3701	3795	3889	3984	4078	4172	4266	4360	4454	4548	
462	66.4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
463	66.5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	
464	66.6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	
465	66.7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	93
466	66.8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	
467	66.9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967			
	67.								0060	0153	
468	67 0246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080	
469	67.1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	
470	67.2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929	
471	67.3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
472	67.3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	
473	67.4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	
474	67.5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	
475	67.6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
476	67.7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	
477	67.8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	
478	67.9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973				
	68.							0063	0154	0245	
479	68.0336	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0970	1060	1151	
480	68.1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055	
481	68.2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	90
482	68.3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	
483	68 3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	
484	68.4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	
485	68.5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
486	68 6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	
487	68.7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	
488	68.8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	
489	68.9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930			
	69.								0019	0107	
490	69 0196	0285	0373	0462	0550	0639	0728	0816	0905	0993	
491	69.1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
492	69.1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	
493	69.2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	
494	69.3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	
495	69.4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	
496	69.5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6064	6182	6269	87
497	69 6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	
498	69.7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	
499	69.8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	
500	64.8970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751	
501	69.9838	9924									
	70.		0011	0098	0184	0271	0358	0444	0531	0617	
502	70.0704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
503	70.1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	
504	70.2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	
505	70.3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
506	70.4150	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	86
507	70.5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	
508	70.5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	
509	70.6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	85
510	70.7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336	
511	70.8421	8506	8591	8676	8761	8846	8031	9015	9100	9185	
512	70.9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948		
	71.									0033	
513	71.0117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879	
514	71.0963	1048	1132	1216	1301	1385	1470	1554	1639	1723	
515	71.1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
516	71.2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	
517	71.3490	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	
518	71.4330	4414	4497	4581	4665	4749	4832	4916	5000	5084	
519	71.5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	
520	71.6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754	83
521	71.6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	
522	71.7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8252	8336	8419	
523	71.8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	
524	71.9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994		
	72.									0077	
525	72.0159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903	
526	72 0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
527	72.1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	
528	72.2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	
529	72.3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	
530	72.4276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013	
531	72.5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	
532	72 5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	
533	72.6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	81
534	72.7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	
535	72.8354	8435	8516	8597	8678	8760	8841	8922	9003	9084	
536	72.9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	
537	72.9974										
	73.	0055	0136	0217	0298	0378	0459	0540	0921	0702	
538	73.0782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1421	1508	
539	73.1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	80
540	73.2394	2447	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117	
541	73.3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	
542	73.3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	
543	73.4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	
544	73 5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	
545	73.6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	
546	73 7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	79
547	73.7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	
548	73.8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	
549	73.9572	9651	9731	9810	9889	9968					
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
	74.						0047	0126	0205	0284	79
550	74.0363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073	
551	74.1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	
552	74.1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	
553	74.2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
554	74.3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	
555	74.4293	4371	4450	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	
556	74.5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	
557	74.5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	
558	74.6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	
559	74.7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	
560	74 8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885	
561	74.8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	77
562	74.9736	9814	9891	9968							
	75.				0045	0123	0200	0277	0354	0431	
563	75.0508	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	
564	75.1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	
565	75.2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	
566	75.2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3507	
567	75.3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	
568	75.4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4833	4960	5036	76
569	75.5112	5189	5265	5341	5418	5494	5570	5646	5722	5799	
570	75.5875	5951	6027	6103	6179	6256	6332	6408	6484	6560	
571	75.6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	
572	75.7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	
573	75.8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	
574	75.8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	
575	75.9668	9743	9819	9894	9970						75
	76.					0045	0121	0196	0272	0347	
576	76.0422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101	
577	76.1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	
578	76.1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	
579	76.2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	
580	76.3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101	
581	76.4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	
582	76.4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	
583	76.5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
584	76.6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	
585	76.7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	
586	76.7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	
587	76.8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	
588	76.9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968		
	77.									0042	
589	77.0115	0189	0263	0336	0410	0484	0558	0631	0705	0778	
590	77.0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514	
591	77.1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248	73
592	77.2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
593	77.3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	73
594	77.3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	
595	77.4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	
596	77.5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5736	5829	5902	
597	77.5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	
598	77.6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	
599	77.7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
600	77.8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802	
601	77.8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	
602	77.9596	9669	9741	9813	9885	9957					
	78.						0029	0101	0173	0245	
603	78.0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965	
604	78.1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684	
605	78.1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401	
606	78 2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117	
607	78.3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832	71
608	78.3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546	
609	78.4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259	
610	78.5330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970	
611	78.6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	
612	78.6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390	
613	78.7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098	
614	78.8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804	
615	78.8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510	
616	78.9581	9651	9722	9792	9863	9933					70
	79:						0003	0074	0144	0215	
617	79.0285	0356	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918	
618	79.0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620	
619	79.1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	
620	79.2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022	
621	79.3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721	
622	79.3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418	
623	79 4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115	
624	79.5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811	69
625	79.5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6433	6505	
626	79.6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198	
627	79.7267	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890	
628	79.7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582	
629	79.8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272	
630	79 9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961	
631	80.0029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648	
632	80.0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335	
633	80.1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	
634	80.2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	68
635	80.2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	
636	80.3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	
637	80.4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4684	4753	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
638	80.4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433	68
639	80.5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	
640	80.6180	6248	6316	6384	6431	6519	6587	6655	6723	6790	
641	80.6858	6926	6993	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	
642	80.7535	7603	7670	7738	7805	7873	7941	8008	8076	8143	
643	80.8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	
644	80.8886	8953	9021	9088	9155	9223	9290	9358	9425	9492	67
645	80 9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964				
	81.							0031	0098	0165	
646	81.0233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837	
647	81.0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	
648	81.1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	
649	81.2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	
650	81.2913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514	
651	81.3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	
652	81.4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	
653	81.4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	
654	81.5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	66
655	81.6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	
656	81.6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	
657	81.7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160	
658	81.8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	
659	81.8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	
660	81.9544	9610	9676	9741	9807	9873	9939				
	82.							0004	0070	0136	
661	82.0202	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792	
662	82 0858	0924	0989	1055	1420	1186	1251	1317	1382	1448	
663	82,1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	
664	82.2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	65
665	82.2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	
666	82.3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3931	3996	4061	
667	82.4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	
668	82.4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	
669	82.5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	
670	82.6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658	
671	82.6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	
672	82.7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7950	
673	82.8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	
674	82.8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	
675	82.9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	64
676	82.9947										
	83.	0011	0075	0139	0204	0268	0332	0396	0460	0525	
677	83.0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	
678	83.1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	
679	83.1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	
680	83.2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083	
681	83.3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
682	83.3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	64
683	83.4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	
684	83.5056	5120	5183	5247	5310	5374	5437	5500	5564	5627	
685	83.5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	63
686	83.6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	
687	83.6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	
688	83.7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	
689	83.8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	
690	83.8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415	
691	83.9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981		
	84.									0043	
692	84.0106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671	
693	84.0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	
694	84.1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	
695	84.1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
696	84.2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	
697	84.3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	
698	84.3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	
699	84.4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	
700	84.5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656	
701	84.5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	
702	64.6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	
703	84.6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	
704	84.7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	
705	84.8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	
706	84.8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
707	84.9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	
	85.										
708	85.0033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585	
709	85.0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	
710	85.1258	1320	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809	
711	85.1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	
712	85.2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	
713	85.3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	
714	85.3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	
715	85.4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	
716	85.4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	
717	85.5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	
718	85.6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	60
719	85.6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7151	7212	7272	
720	85.7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875	
721	85.7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	
722	85.8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	
723	85.9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	
724	85.9739	9799	9859	9918	9978						
	86.					0038	0098	0158	0218	0278	
725	85.0338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
726	86.0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
727	86.1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	
728	86.2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	
729	86.2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	59
730	86.3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3799	3858	
731	81.3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	
732	86.4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	
733	86.5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	
734	86.5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	
735	86.6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	
736	86.6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	
737	86.7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	
738	86.8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	
739	96.8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	
740	86.9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760	
741	86.9818	9877	9935	9994							
	87.				0053	0111	0170	0228	0287	0345	58
742	87.0404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	
743	87.0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	
744	87.1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	
745	82.2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	
746	87.2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	
747	87.3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	
748	87.3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	
749	87 4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4887	4945	5003	
750	87.5061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582	
751	87.5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	
752	87.6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	
753	87.6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	
754	87.7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	
755	87.7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
756	87.8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	
757	87.9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	
758	87.9669	9729	9784	9841	9898	9956					
	88.						0013	0070	0127	0185	
759	88.0242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756	
760	88.0814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1270	1328	
761	88.1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	
762	88.1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	
763	88.2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	7980	3037	
764	88.3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	
765	88.3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	
766	88.4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	
767	88.4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	
768	88.5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	
769	88.5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
770	88.6491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
771	88.7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	56
772	88.7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	
773	88.8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	
774	88.8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	
775	88.9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	
776	88.9862	9918	9974								
	89.			0030	0086	0141	0197	0253	0309	0365	
777	89.0421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	
778	89.0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	
779	89.1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	
780	89.2095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595	
781	89.2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	
782	89.3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	55
783	89.3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	
784	89.4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4750	4814	
785	89.4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	
786	89.5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	
787	89.5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	
788	89.6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	
789	89.7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	
790	89.7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122	
791	89.8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	
792	89.8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	
793	89.9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	
794	89.9821	9875	9930	9985							
	90.				0039	0094	0149	0203	0258	0312	
795	90.0367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	
796	90.0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	
797	90.1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
798	90.2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	
799	90.2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	
800	90.3090	3144	3198	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578	
801	90.3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	
802	90.4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	
803	90.4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	
804	90.5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	
805	90.5796	5850	5904	5958	6012	6065	6119	6173	6227	6281	
806	90 6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	
807	90.6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	
808	90.7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	
809	40.7949	8002	8056	8110	8163	8217	8271	8324	8378	8431	
810	90.8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967	
811	90.9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	
812	90.9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984		53
	91.									0037	
813	91.0091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571	
814	91.0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
815	91.1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	53
816	91.1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	
817	91.2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	
818	91.2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	
819	91.3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	
820	91.3814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290	
821	91.4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819	
822	91.4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	
823	91.5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	
824	91.5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	
825	91.6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	
826	91.6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	
827	91.7505	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	
828	91.8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	52
829	91.8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	
830	91.9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549	
831	91.9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967			
	92.								0019	0071	
832	92.0123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593	
833	92.0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	
834	92.1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	
835	92.1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	
836	92.2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	
837	92.2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	
838	92.3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	
839	92.3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	
840	92.4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744	
841	92.4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	
842	92.5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776	
843	92.5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291	51
844	92 6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805	
845	92.6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319	
846	92.7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832	
847	92.7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345	
848	92.8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857	
849	92.8908	8959	9010	9061	9113	9163	9215	9266	9317	9368	
850	92.9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879	
851	92 9930	9981									
	93.		0032	0083	0134	0185	0236	0287	0338	0389	
852	93.0440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	
853	93.0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	
854	93.1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	
855	93.1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	
856	93.2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	
857	93.2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
858	93.3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	51
859	93.3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448	
860	93.4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953	
861	93.5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	50
862	93.5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	
863	93.6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	
864	93.6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	
865	93.7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	
866	93.7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	
867	93.8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	
868	93.8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	
869	93.9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	
870	93.9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9918	9968	
871	94 0018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467	
872	94.0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	
873	94.1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	
874	94.1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	
875	94.2008	2058	2107	2157	2209	2256	2306	2355	2405	2455	
876	94.2504	2554	2603	2653	2707	2752	2801	2851	2901	2950	
877	94.3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	49
878	94.3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939	
879	94.3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433	
880	94.4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927	
881	94.4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	
882	94.5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	
883	94.5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	
884	94.6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	
885	94.6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	
886	94.7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	
887	94.7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	
888	94.8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	
889	94.8902	8951	8999	9048	9097	9149	9195	9244	9292	9341	
890	94.9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829	
891	94.9878	9926	9975								
	95.			0024	0073	0121	0170	0219	0267	0316	
892	95.0365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	
893	95.0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	
894	95.1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1774	
895	95.1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
896	95.2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	
897	95.2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	
898	95.3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	
899	95 3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	
900	95.4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4620	4677	
901	95 4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
902	95 5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
903	95.5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	
904	95.6168	6216	6265	6313	6391	6409	6457	6505	6553	6601	
905	95.6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	
906	95 7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	
907	95.7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	
908	95 8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	
909	95.8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	
910	95.9041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471	
911	95.9518	9566	9614	9661	9709	9756	9804	9852	9900	9947	
912	95.9995										
	96.	0042	0090	0138	0185	0233	0280	0328	0376	0423	47
913	96.0471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	
914	96.0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	
905	96.1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	
916	96.1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	
917	96.2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	
918	96.2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	
919	96.3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	
920	96.3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212	
921	96.4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	
922	96.4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	
923	96.5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	
924	96.5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	
925	96.6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	
926	96 6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	
927	96.7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	
928	96.7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	
929	96.8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	
930	96.8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903	
931	96.8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	
932	96.9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	46
933	96.9882	9928	9975								
	97.			0021	0068	0114	0161	0207	0254	0300	
934	97.0347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	
935	97.0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	
936	97.1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	
937	97.1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	
938	97.2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	
939	97.2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	
940	97.3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543	
941	97.3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	
942	97.4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4373	4420	4466	
943	97.4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	
944	97.4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
945	97.5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	46
946	97.5891	5937	5983	6029	6075	6121	6166	6212	6258	6304	
947	97.6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6762	
948	97.6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	
949	97.7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	
950	97.7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135	
951	97.8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	
952	97.8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	
953	97.9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	
954	97.9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	
	98.										
955	98.0003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412	45
956	98 0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	
957	98.0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	
958	98.1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	
959	98.1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	
960	98.2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678	
961	98.2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	
962	98.3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3490	3536	3581	
963	98 3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	
964	98.4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	
965	98.4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	
966	98.4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	
967	98.5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	
968	98.5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	
969	98 6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	
970	98.6772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7175	
971	98.7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	
972	98.7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	
973	98.8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	
974	98.8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	
975	98.9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	44
976	98.9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	
977	98.9895	9939	9983								
	99.			0028	0072	0117	0161	0206	0250	0294	
978	99 0339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	
979	99.0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	
980	99.1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625	
981	99.1669	1713	1758	1802	1846	1890	1934	1979	2023	2067	
982	99.2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	
983	99.2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	
984	99.2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	
985	99.3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	
986	99.3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	
987	99.4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	
988	99.4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
989	99.5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	44
990	99.5635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030	
991	99.6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	
992	99.6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	
993	99.6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	
994	99.7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	
995	99.7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	
996	99.8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	
997	99.8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	
998	99.9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9478	9522	43
999	99.9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

LOGARITMI DEI RAPPORTI.

Del diametro alla circonferenza ossia di π . .		0,497150
Del giorno all'anno comune		7,437707
Del giorno all'anno bisestile		7,436519
Dell'ora al giorno		8,619789
Dei minuti all'ora		8,221849
Dei minuti secondi all'ora		6,443697
Del Braccio fiorentino . . .	al metro . .	0,766135
» di Modena . . .	» . .	9,801509
» di Milano . . .	» . .	9,774460
Della Canna di Napoli e Palermo	» . .	0,422508
Del Braccio di Parma	» . .	9,805841
Della Canna di Roma	» . .	0,349126
Del Piede di Torino	» . .	9,711301
Del Piede di Venezia	» . .	9,541249
Dello Staio di Firenze . . .	all'ettolitro .	9,386731
Del Moggio di Milano	» .	0,165049
» Sacco di Modena	» .	0,102091
» Tomolo di Napoli e Palermo	» .	9,744646
» Staio di Parma	» .	9,672467
» Rubbio di Roma	» .	0,469034
Dell'Emina di Torino . . .	» .	9,519225
Del Moggio di Venezia . . .	» .	0,522795
Del Barile Fiorentino (vino) . .	» .	9,658812
Lo stesso per l'olio	» .	9,524123
Della Brenta di Milano . . .	» .	9,878259
Del Quartaro di Modena . . .	» .	0,007797
» Barile di Napoli e Palermo	» .	9,639735
Della Brenta di Parma . . .	» .	9,855349
Del Barile di Roma	» .	9,765978
Della Brenta di Torino . . .	» .	9,692901

Della Botte di Venezia	al chilogram.	0,814041
Della Libbra di Firenze	»	9,530891
» grossa di Milano	»	9,882250
» sottile di Milano	»	9,514273
» di Modena	»	9,532062
» di Napoli e Palermo	»	9,505557
» di Parma	»	9,515874
» di Roma	»	9,530291
» di Torino	»	9,566885
» grossa di Venezia	»	9,678517
» sottile di Venezia	»	9,493082

Del Quadrato di Firenze	all'Aro	1,532269
Della Pertica di Milano	»	0,815921
Della Biolca di Modena	»	1,452755
Del Moggio di Napoli e Palermo	»	0,845012
Della Biolca di Parma	»	1,488754
Del Rubbio di Roma	»	2,266805
Della Giornata di Torino	»	1,580960
Del Campo di Venezia	»	1,563078

Della Lira toscana	alla Lira ital.	9,924279
Del Fiorino per la Lombardia	»	0,392545
Della Lira di Modena	»	9,484299
Del Ducato di Napoli e Palermo	»	0,628389
Della Lira di Parma	»	9,397940
Dello Scudo di Roma	»	0,729756
Della Lira piemontese	»	9,602060
Della Lira austriaca a Venezia	»	9,936613

FINE.

INDICE.

PARTE PRIMA.

OPERAZIONI FONDAMENTALI DEI NUMERI INTERI, DEI ROTTI COMUNI, DECIMALI ED ETEROGENEI.

ANTICO SISTEMA TOSCANO DI PESI E MISURE
E LORO RAPPORTO CON LE NUOVE.

VECCHIO SISTEMA DI PESI E MISURE ITALIANE
E LORO RAPPORTO CON LE NUOVE.

PARTE SECONDA.

POTENZE E RADICI.

TAVOLE DELLE PRINCIPALI MONETE,
PESI E MISURE NON ITALIANE.

PARTE TERZA.

DELLE PROGRESSIONI E DEI LOGARITMI.

NOZIONI ELEMENTARI DI GEOMETRIA PRATICA.

Errata Corrige.

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
46	3 ris.	che si	che se si
160	4 ris.	5 per 12	12 per 5
226	7 ris.	$\frac{17,5+0.5}{0,50}$	$\frac{17,5+05}{2}$
337	2	piedi	metri